

ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

13. Band, Heft 8 UND IHRE GRENZGEBIETE

S. 337—384

Geschichtliches.

Bortolotti, Ettore: Interpretazione storica dei testi matematici babilonesi. Period. Mat., IV. s. 16, 65—81 (1936).

Neugebauer, O.: Zur geometrischen Algebra. (Studien zur Geschichte der antiken Algebra III.) Quell. Stud. Gesch. Math. B 3, 245—259 (1936).

Verf. schildert seine Auffassung von dem Zusammenhang der babylonischen Mathematik mit der griechischen. Insbesondere wird dargelegt, welche Faktoren für die Entwicklung der babyl. Math. gegenüber der ägyptischen maßgebend waren und wie sich die „Flächenanlegung“ der griechischen „geometrischen Algebra“ als Geometrisierung der Behandlungsweise der quadratischen Gleichungen in der babyl. Math. ansehen läßt.

Bessel-Hagen (Bonn).

Becker, Oskar: Eudoxos-Studien III. Spuren eines Stetigkeitsaxioms in der Art des Dedekind'schen zur Zeit des Eudoxos. Quell. Stud. Gesch. Math. B 3, 236—244 (1936).

Fortführung der „Eudoxos-Studien II“ (s. dies. Zbl. 7, 146). § 1 bringt Belege aus Platon und Aristoteles für das Axiom „Im Vergleich wozu es Größeres und Kleineres gibt, dazu gibt es auch Gleiches“. In § 2 wird gezeigt, daß auch die Beschränkung der Gültigkeit des Axioms durch die Forderung der Homogenität des zugrunde liegenden Größensystems mindestens so alt ist wie der frühe Aristoteles. § 3 stellt aus der Vergleichung vieler Aristoteles-Stellen fest, daß die scharfe Fassung des Begriffs Homogenität durch das multiplikative Axiom des Messens erst Eudoxos zuzuschreiben ist, und daß es zur Zeit des jüngeren und mittleren Aristoteles noch nicht allgemein verstanden war. Wohl weiß Aristoteles, daß endliche und vergleichbare (also homogene) Größen dem Eudoxischen Axiom unterliegen, aber nirgends verwendet er dies Axiom zur Definition des Begriffs homogen, wie dies in späterer Zeit geschehen ist.

Bessel-Hagen (Bonn).

● **Euklid: Elemente, Buch 10.** Nach Heibergs Text übertragen von Theodor Peters. Berlin: Pan-Verlagsges. m. b. H. 1936. 118 S. RM. 5.—.

Birkenmajer, Alexandre: Diophante et Euclide. (2. congr. des math. roum., Turnu-Severin, 5.—9. V. 1932.) Mathematica, Cluj 9, 310—320 (1935).

Verf. vertritt (wie Ref. scheint, mit vollem Recht) gegen E. Hoppe den Standpunkt, daß Diophants Lösungsmethoden durchaus systematisch angelegt sind und sogar einen engen Parallelismus zu Euklids Verfahren zeigen. An zwei Beispielen wird gezeigt, wie sich die scheinbar willkürlichen numerischen Ansätze als Resultat einer ganz allgemeinen Umformung des Problems ergeben.

O. Neugebauer.

Davidson, Israel: Levi ben Abraham ben Hayyim. A mathematician of the XIIIth century. Scripta Math. 4, 57—65 (1936).

Botte ha Nefesh ist der Name eines hebräischen Lehrgedichtes des Levi ben Abraham, welches in 1840 Versen eine Art Enzyklopädie aller Wissenschaften zu geben versucht. Das 7. Kapitel, die Mathematik behandelnd, wird in vorliegendem Aufsatz zum erstenmal veröffentlicht. Das Gedicht bleibt jedoch, ohne Übersetzung und Erklärung, ein Buch mit sieben Siegeln. Die auch sonst schwer verständlichen mittelalterlich-hebr. Verse geben keine klare Darstellung, sondern können geradezu als eine Sammlung mathematischer Rätselsprüche betrachtet werden. Mit der Veröffentlichung des Textes hat Prof. Davidson sich der philologischen Aufgabe entledigt. Die Übersetzung und Erklärung überläßt er Prof. Ginsburg, der sie für die nächste Zukunft in Aussicht stellt.

S. Gandz (Kopenhagen).

Thaer, Clemens: Die Euklid-Überlieferung durch At-Tûsî. Quell. Stud. Gesch. Math. B 3, 116—121 (1936).

Klamroth hat 1881 unter Berufung auf die arabische Tradition eingreifende Änderungen in den Elementen Euklids gefordert; diese Forderung ist aber 1884 von Heiberg zurückgewiesen worden. Verf. will die Revision dieses Urteils anregen. Er berichtet über eine Bearbeitung der Elemente durch At-Tûsî (1201—1274) (vgl. H. Suter, Die Math. u. Astr. d. Araber, S. 151. Leipzig 1900) und schließt hieraus, die arabische Tradition über Euklid verdiene doch größere Beachtung, als ihr bisher zuteil geworden ist; genauere Entscheidung der Frage erfordere aber die Hilfe der Orientalisten.

Dijksterhuis (Oisterwijk, Holland).

Hayashi, Tsuruichi: On the mathematicians in the Chugoku districts. Tôhoku Math. J. 41, 290—307 (1936) [Japanisch].

Ludendorff, H.: Zur astronomischen Deutung der Maya-Inschriften. (Untersuchungen zur Astronomie der Maya, Nr. 10.) S.-B. preuß. Akad. Wiss. 1936, 65—88.

● **Keller-Zschokke, Joh. Val.:** Pierre Louis Moreau de Maupertuis von St. Malo, Bretagne und sein Grab in Dornach, Kanton Solothurn mit seinem Bild und einem Kärtchen, sein Leben und Wirken. Basel: B. Wepf & Co. 1935. 105 S. Frcs. 4.—.

Ausführliche rein biographische Mitteilungen über Maupertuis. *O. Neugebauer*.

Algebra und Zahlentheorie.

Peltesohn, Rose: Das Turnierproblem für Spiele zu je dreien. Berlin: Diss. 1936. 19 S.

Si nous appelons, indépendamment de la question de savoir si les problèmes sont possibles et pour quels N ils le sont: — problème de catégorie I, le problème général suivant: Trouver dans l'ensemble des p -uples (combinaisons p à p) de N éléments, un système $S(p, q)$ de ces p -uples tel que chaque q -uple ($q < p$) y entre une fois et une seule fois dans un p -uple; — problème de catégorie II, le problème général suivant: Répartir l'ensemble des p -uples de N éléments en tels systèmes $S(p, q)$; — le problème traité et résolu par l'auteur à propos de l'établissement d'un tour pour jeux à trois, est un problème de catégorie II: Répartir les triples de N éléments en systèmes $S(3, 1)$. Le problème ne se pose que pour $N = 3n$; il est résolu complètement par l'auteur en ce sens que le moyen est donné de faire la répartition demandée pour chaque N , et ainsi l'établissement d'un tour pour jeux à trois est complet. *Bays*.

La Barbeba, Alberto: Dimostrazione del teorema fondamentale dell'algebra nel campo reale. Esercit. Mat., II. s. 9, 35—42 (1936).

Sz. Nagy, Julius v.: Über die Nullstellen gewisser rationaler Funktionen. Tôhoku Math. J. 41, 415—422 (1936).

Aus einem Satze von N. Obrechhoff (dies. Zbl. 8, 193) folgert der Verf. einige weitere Sätze, von denen folgende einfachere Formulierung zulassen: Ist $f(z)$ ein Polynom n -ten Grades mit lauter reellen Nullstellen, so wird die algebraische Fläche $F(x, y, z) = \left[f(x) - \frac{f''(x)}{2} y^2 + \frac{f^{IV}(x)}{4!} y^4 - \dots \right] + yz \left[f'(x) - \frac{f'''(x)}{3!} y^2 + \dots \right] = 0$ von jeder Geraden der Gestalt $y = \text{konst.}, z = \text{konst.}$ in lauter reellen Punkten getroffen. — Ist $f(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \dots (z - \alpha_n)$, δ und γ beliebige Zahlen ($|\gamma| \neq 0, 1, \infty$) und $|\gamma_i| \neq 0, 1$, $\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_n = |\gamma|$, so kann das Polynom $f(z + \delta) - \gamma f(z - \delta)$ in einem gemeinsamen Punkte der n Kreisbereiche $\left| \frac{\alpha_x - \delta - z}{\alpha_x + \delta - z} \right| \geq \gamma_x$ oder $\left| \frac{\alpha_x - \delta - z}{\alpha_x + \delta - z} \right| \leq \gamma_x$ ($x = 1, 2, \dots, n$) nur dann verschwinden, wenn dieser Punkt auf dem Rande jedes Kreisbereiches liegt. — Die übrigen Sätze dieser Arbeit sind sehr kompliziert formulierbar.

N. Tschebotaröw (Kasan).

Shanok, Casper: Convex polyhedra and criteria for irreducibility. Duke math. J. 2, 103—111 (1936).

A certain class of criteria of irreducibility (Dumas-Ore) for polynomials in the rational field (or more general in a field with a discrete absolute value) is based upon a multiplication theorem for the convex polygon corresponding to the exponents of a prime dividing the coefficients. The author generalizes this theory to two variables by a similar introduction of convex polyhedra. For these polyhedra the (Minkowski) multiplication theorem holds, but is somewhat more complicated than in the plane case since extraneous faces may occur. However the results are sufficient to obtain new classes of irreducible polynomials in 2 variables. — To conclude the author points out that an application of the method to polynomials in one variable by considering two primes simultaneously does not seem likely to give new results and that certain theorems of Fujiwara in this direction are not correct. *Oystein Ore* (New Haven).

Schluckebier, Marie-Luise: Äquimodulare Matrizen. Bonn: Diss. 1935. 32 S.

If $\mathfrak{A} = (a_{pq})$ is an n -rowed matrix with complex elements and $A = (|a_{pq}|)$, the author shows that $M(A) = \sqrt{n}M(\mathfrak{A})$ if and only if \mathfrak{A} is equimodular, where

$$M(\mathfrak{A}) = \text{Max}_{p,q=1}^n |a_{pq} x_p y_q| \quad \text{for} \quad \sum_{p=1}^n x_p \bar{x}_p \leq 1, \quad \sum_{p=1}^n y_p \bar{y}_p \leq 1.$$

In an independent way she proves that second and third order equimodular matrices are equivalent, respectively, to the Sylvester matrices S_2 and S_3 . In the case of fourth order equimodular matrices the equivalence to the Toeplitz matrix T_4 is proved in a simpler manner. The principal result of the paper is the proof that every fifth order equimodular matrix is equivalent to the Sylvester matrix S_5 . After some discussion of sixth order equimodular matrices and equimodular minors of equimodular matrices, the paper closes with two theorems on equimodular matrices whose elements are p^k -th (p a prime) roots of unity. *Sokolnikoff* (Madison).

Burington, Richard Stevens: Matrices in electric circuit theory. J. Math. Physics, Massachusetts Inst. Technol. 14, 325—349 (1935).

This paper, mainly expository, is written to demonstrate the utility of the matrix method in electric circuit theory. Part I is a resumé of many of the important concepts and theorems in matrix theory. In Part II some of these concepts are interpreted in the terminology of circuit theory. A network matrix is

$$A = (R_{ij} + L_{ij} p + D_{ij} p^{-1}) \quad p = d/dt$$

where R_{ij} , L_{ij} , D_{ij} are circuit parameters. Networks derivable from A by a change in agreement as to paths etc. have the form AQ . If currents and e.m.f.'s are subjected to non-singular transformations Q and P resp., A is replaced by $P^{-1}AQ$. If two networks with matrices A and B are properly connected (so as to induce no new impedances etc.), the new network will have the matrix $A \dot{+} B$. Many references are cited. *MacDuffee* (Madison).

Turnbull, H. W., and J. Williamson: Hereditary matrices. Proc. London Math. Soc., II. s. 41, 57—76 (1936).

This paper is in the symbolic theory of projective invariants of algebraic forms. A rational integral invariant of a system of linear ground forms is associated with a double array, or matrix, of integers of a certain restricted type. A certain operation upon the matrix makes it correspond to the dual invariant. Another operation arises from the Clebsch transference principle. All matrices obtainable from a given matrix by repetitions of these operations determine a family of invariants having certain properties (as reducibility or irreducibility) in common — hence the term, hereditary matrices. A generalized transference principle yields invariants outside the family. — Application is made to prepared systems. *MacDuffee* (Madison).

Spampinato, Nicolò: Sulle funzioni di una variabile, in un'algebra complessa, ad n unità, dotata di modulo. III. Rend. Circ. mat. Palermo **59**, 185—227 (1935).

Parts I, II (this Zbl. **7**, 290) and III (this Zbl. **9**, 119) of this memoir were concerned with power series and principal derivatives and integrals of functions of one variable in the algebra A . The principal plane π of a point a of A was the set of points ϱa where ϱ is a complex variable, and all limits as $z \rightarrow a$ were taken along curves in π . In the present paper (Part IV) the theory is extended to characteristic derivatives and integrals, where the path of approach is along a curve in the characteristic plane $a\varrho + b$ of a . The series developments of a function around a point z_0 relative to all characteristic planes of z_0 can be combined into a unique development which represents the function in a hypersphere with center at z_0 . — In Part V the author studies the general polynomial $P(x)$ in the indeterminate x , obtains a seminormal form, and conditions that two such forms be equal. An upper bound is obtained for the number γ_p of essential complex parameters upon which the general polynomial of degree p depends, and it is shown that this upper bound is attained when A is a total matrix algebra. A necessary and sufficient condition that $P(x) = \sum_i P^{(i)} u_i = 0$ have a multiple root at $x^{(0)}$ is that the jacobian of the $P^{(i)}$ vanish at $x^{(0)}$. There is a relation between the multiplicity and the characteristic derivatives of $P(x)$. MacDuffee (Madison).

Mori, Shinziro: Über Totalnullteiler kommutativer Ringe mit abgeschwächtem U-Satz. J. Sci. Hiroshima Univ. A **6**, 139—146 (1936).

Alle Elemente t eines kommutativen Ringes \mathfrak{R} mit $tx = 0$ für jedes x aus \mathfrak{R} bilden ein Ideal t , den Totalnullteiler von \mathfrak{R} . In \mathfrak{R} gelte der Vielfachenkettensatz modulo jedes vom Nullideal verschiedenen Ideals. Verf. beweist: Dann und nur dann gilt in \mathfrak{R} auch der Teilerkettensatz, wenn t eine endliche Idealbasis hat (eine hinr. Bed. gab Y. Akizuki, vgl. dies. Zbl. **12**, 245). Der Beweis beruht u. a. auf einer Untersuchung der Struktur von t und auf dem Satz: Ist \mathfrak{R} nilpotent, so ist \mathfrak{R}/t stets eine endliche Menge. Köthe (Münster i. W.).

Weber, Werner: Verschränkte Produkte mit Normalringen. Eine Vorbemerkung zu der gleichbetitelten nachstehenden Arbeit von O. Teichmüller. Deutsche Math. **1**, 90 bis 92 (1936).

Bemerkungen über bekannte Eigenschaften der Faktorensysteme. Ore.

Teichmüller, Oswald: Verschränkte Produkte mit Normalringen. Deutsche Math. **1**, 92—102 (1936).

The author generalises E. Noether's "cross-multiplication" of a normal field Σ/P with its Galois group. He multiplies direct sums S of isomorphic fields $\Sigma_i/P = e_i S$ with suitable groups \mathfrak{G} of automorphisms σ . ("Normalringe", cfr. also the "normal products" of Levitzki.) The generalised cross-product is covariant under extension of the reference field
$$(a_{\sigma, \tau}, S, \mathfrak{G})_{\Omega} = (a_{\sigma, \tau}, S_{\Omega}, \mathfrak{G}).$$

The direct product of cross-products is isomorphic to a cross-product belonging to α) the direct product of the "normal rings" S_i , β) the direct product $\mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_2$ of the groups \mathfrak{G}_i concerned, γ) the product of the factor sets

$$(a_{\sigma_1, \tau_1}, S_1, \mathfrak{G}_1) \times (b_{\sigma_2, \tau_2}, S_2, \mathfrak{G}_2) \cong (a_{\sigma_1, \tau_1} \cdot b_{\sigma_2, \tau_2}, S_1 \times S_2, \mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_2).$$

On the other hand the new cross-products are equivalent (in the sense of R. Brauer) to ordinary cross-products $(a_{\sigma, \tau}, S, \mathfrak{G}) \sim (e, a_{\sigma, \tau}, \Sigma, \mathfrak{H})$

where \mathfrak{H} is the Galois group of Σ/P .

Ore (New Haven).

Vandiver, H. S.: Constructive derivation of the decomposition-field of a polynomial. Ann. of Math., II. s. **37**, 1—6 (1936).

The author considers the problem of constructing the prime factor decomposition of a polynomial with coefficients in an absolute algebraic field in a finite number of steps. The method is similar to a method of Weber. The difficult case where conjugate factors occur is solved by the introduction of an auxilliary variable. Ore.

Vandiver, H. S.: On the ordering of real algebraic numbers by constructive methods. Ann. of Math., II. s. **37**, 7—16 (1936).

The author effectively constructs to any polynomial $f(x)$ with rational coefficients (also with coefficients in an effectively ordered absolutely algebraic field) an ordered algebraic field such that in each rational interval (a, b) with $f(a)f(b) < 0$ (root-interval) there is a root of the polynomial. — "Although the methods of the paper enable us to carry out a process which is usually called approximation to a real root of an algebraic equation . . . , in no case do we pass to a limit. The roots of the equations are in all cases purely symbolic in the sense of Steinitz." The root intervals are found constructively after Kronecker; the interesting algebraic ordering is a refinement of a procedure by Schatunovski. The Archimedean axiom is essential; a fundamental lemma is the formulation of Rolle's theorem in terms of root intervals. *Ore.*

Hasse, Helmut, und Ernst Witt: Zyklische unverzweigte Erweiterungskörper vom Primzahlgrade p über einem algebraischen Funktionenkörper der Charakteristik p . Mh. Math. Phys. **43**, 477—492 (1936).

Für den Fall des Geschlechtes 1 wurden die im Titel genannten Körper vor einiger Zeit von Hasse untersucht (dies. Zbl. **10**, 148). Das Ergebnis dieser Arbeit wird auf beliebiges Geschlecht verallgemeinert. K sei ein algebraischer Funktionenkörper einer Unbestimmten über dem vollkommenen Konstantenkörper k der Charakteristik $p \neq 0$, K habe das Geschlecht g . Es gebe in K ein nichtspezielles System von Primdivisoren p_1, \dots, p_g ersten Grades, d. h. $p = p_1 \dots p_g$ erzeuge eine Klasse von der Dimension 1 (p gehe in keinem ganzen Differentialdivisor auf). Dies läßt sich nötigenfalls durch eine endliche algebraische Erweiterung des Konstantenkörpers erreichen. Hauptergebnis: Es gibt eine g -reihige quadratische Matrix A in k , deren Klasse im Sinne der Transformationen $A \rightarrow SAS^{-p}$ (wo S^p die Matrix bedeutet, die aus A durch Potenzierung aller Elemente mit p entsteht, nicht die p -te Potenz von S) mit beliebig regulärer Matrix S aus k eine Invariante von K ist derart, daß die in bezug auf Konstantenerweiterungen unabhängigen zyklischen unverzweigten Erweiterungskörper Z vom Grade p über K umkehrbar eindeutig den in bezug auf den Primkörper P von k linear unabhängigen g -gliedrigen Lösungsvektoren c in k von $Ac^p = c$ entsprechen. A wird so gewonnen: Zu den Primfaktoren eines nichtspeziellen Divisors $p = p_1 \dots p_g$ wähle man Primelemente π_1, \dots, π_g . Es gibt dann wesentlich eindeutig ein System ganzer Multipla v_1, \dots, v_g von $1/p^p$ in K mit $v_j \equiv e_{ij}/\pi_i^p \pmod{1/p_i}$, wo $(e_{ij}) =$ Einsmatrix. Ist dann $v_j \equiv e_{ij}/\pi_i^p - a_{ij}/\pi_i \pmod{p_i^0}$, a_{ij} aus k , so ist $A = (a_{ij})$ die gesuchte Matrix. Andere Systeme p und andere Primelemente ergeben gerade im obigen Sinne transformierte Matrizen SAS^{-p} . Ist $Z = K(w)$ mit $w^p - w = v$, v in K , so gewinnt man die Z aus den Lösungen c von $Ac^p = c$ folgendermaßen: Man bilde mit den obigen v_i das Element $v = \sum v_i c_i^p + b$, wo b ein beliebiges Element von k ist (offenbar geben v und $v + b$ den gleichen Körper Z). — Über das lineare Gleichungssystem $Ax^p = x$ wird bewiesen: Ist k algebraisch abgeschlossen und hat $AA^p \dots A^{p^{p-1}}$ den Rang g , so hat $Ax^p = x$ genau p^g Lösungen in k ; und über die Transformationen $A \rightarrow SAS^{-p}$: Die Ränge g_v von $A^{(v)} = AA^p \dots A^{p^{v-1}}$, $A^{(0)} = 1$ bilden ein vollständiges Invariantensystem der Transformationsklasse von A , äquivalente A haben gleiche g_v und umgekehrt; die g_v erfüllen

$$g_0 - g_1 \geq g_1 - g_2 \geq \dots \geq g_{g-1} - g_g \geq g_g - g_{g+1} = g_{g+1} - g_{g+2} = \dots$$

und jedes System von Zahlen g_v mit diesen Eigenschaften kommt als Invariantensystem einer Klasse von A vor.

Deuring (Leipzig).

Hasse, Helmut: Theorie der höheren Differentiale in einem algebraischen Funktionenkörper mit vollkommenem Konstantenkörper bei beliebiger Charakteristik. J. reine angew. Math. **175**, 50—54 (1936).

Die Theorie der einfachen Differentiale eines algebraischen Funktionenkörpers K über einem vollkommenen Konstantenkörper k ist vom Verf. kürzlich dargestellt worden (dies. Zbl. **10**, 6). Wesentliche Schwierigkeiten traten dabei für den Fall auf, daß die Charakteristik p

für k nicht Null ist. \mathfrak{p} sei ein Primdivisor von K , π ein Primelement zu \mathfrak{p} und $x = \sum_{\mu} a_{\mu} \pi^{\mu} = x(\pi)$ die π -Entwicklung eines Elementes x von K , wobei die Koeffizienten a_{μ} dem Konstantenkörper $k_{\mathfrak{p}}$ der \mathfrak{p} -adischen Erweiterung $K_{\mathfrak{p}}$ von K entstammen (lokaler Konstantenkörper). Man kann dann zwar für feste \mathfrak{p} , π die formalen Ableitungen

$$\frac{d^{\kappa} x}{d\pi^{\kappa}} = \sum_{\mu} \mu(\mu-1) \dots (\mu-(\kappa-1)) a_{\mu} \pi^{\mu-\kappa}$$

definieren, aber sie sind für $p \neq 0$ sämtlich Null, falls $\kappa \geq p$. Aus diesem Grunde werden statt der Ableitungen die Taylorkoeffizienten

$$D_{\pi}^{(\kappa)} x = \sum_{\mu} \binom{\mu}{\kappa} a_{\mu} \pi^{\mu-\kappa} \left(= \frac{1}{\kappa!} \frac{d^{\kappa} x}{d\pi^{\kappa}} \right)$$

betrachtet. Es sind wohlbestimmte Elemente aus $K_{\mathfrak{p}}$. Die Gesamtheit der zu x auf diese Weise bei festem κ für alle \mathfrak{p} und alle zugehörigen π zugeordneten Elemente $D_{\pi}^{(\kappa)} x$ aus $K_{\mathfrak{p}}$ nennen wir das κ -te Differential $D^{(\kappa)} x$. Die iterative Herleitung

$$D_{\pi}^{(\kappa+1)} x = \frac{1}{\kappa+1} D_{\pi}^{(1)} D_{\pi}^{(\kappa)} x$$

versagt für $p \neq 0$; aus diesem Grunde muß mit den Taylorentwicklungen

$$x(\pi + t) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} (D_{\pi}^{(\kappa)} x) t^{\kappa} = x + \sum_{\kappa=1}^{\infty} (D_{\pi}^{(\kappa)} x) t^{\kappa}$$

für unbestimmtes t gearbeitet werden. Die Bedeutung der höheren Differentiale liegt darin, daß für \mathfrak{p} -ganze x die Ordnungszahl von x an der Stelle \mathfrak{p} gleich der Ordnung des frühesten Differentialquotienten $D_{\pi}^{(\mu)} x \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$ ist (dabei ist wesentlich, daß die Bildung D und nicht die Differentiation d/dx benutzt wird). — Für ein Polynom $f(x, y)$ zweier Unbestimmten x, y in k werden (wieder wegen der Möglichkeit $p \neq 0$) die höheren partiellen Ableitungen so erklärt

$$A_{\mu, \nu}^{(\mu+\nu)} f = \sum_{m, n} \binom{m}{\mu} \binom{n}{\nu} a_{m, n} x^{m-\mu} y^{n-\nu},$$

also

$$f(x+u, y+v) = \sum_{\mu, \nu=0}^{\infty} (A_{\mu, \nu}^{(\mu+\nu)} f) u^{\mu} v^{\nu} \quad (\text{Taylorentwicklung}).$$

Liegen nun x, y , also auch $f(x, y) = f$ in K , so erhält man die Regel

$$\sum_{\kappa=0}^{\infty} (D^{(\kappa)} f) t^{\kappa} = \sum_{\mu, \nu=0}^{\infty} (A_{\mu, \nu}^{(\mu+\nu)} f) \left(\sum_{r=1}^{\infty} (D^{(r)} x) t^r \right)^{\mu} \left(\sum_{s=1}^{\infty} (D^{(s)} y) t^s \right)^{\nu} \quad (1)$$

zur Bildung der höheren Differentiale von f aus denen von x und y . Ist x so gewählt, daß K über $k(x)$ separabel ist, so gibt es für jedes y aus K ein f mit $f(x, y) = 0$. Da dann $A_{0,0}^{(0)} f = f = 0$ und $A_{0,1}^{(1)} f = \frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$ (Separabilität!) ist, so hat die Gleichung

$$\sum_{\mu, \nu=0}^{\infty} (A_{\mu, \nu}^{(\mu+\nu)} f) u^{\mu} v^{\nu} = 0$$

eine eindeutig bestimmte Auflösung

$$v = \sum_{\mu=1}^{\infty} (D_x^{(\mu)} y) u^{\mu}$$

mit rational aus den $A_{\mu, \nu}^{(\mu+\nu)} f$ gebildeten Koeffizienten $D_x^{(\mu)} y$, die offenbar als formale Analoga der Taylorkoeffizienten

$$\frac{1}{\kappa!} \frac{d^{\kappa} y}{dx^{\kappa}}$$

anzusehen sind. Aus (1) folgt dann

$$\sum_{s=1}^{\infty} (D^{(s)} y) t^s = \sum_{\mu=1}^{\infty} (D_x^{(\mu)} y) \left(\sum_{r=1}^{\infty} (D^{(r)} x) t^r \right)^{\mu},$$

also

$$D^{(\kappa)} y = (D_x^{(\kappa)} y) (dx)^{\kappa} + \sum_{\lambda=1}^{\kappa-1} (D_x^{(\lambda)} y) X^{(\kappa, \lambda)}, \quad (2)$$

wo $dx = D^{(1)} x$ ist und die $X^{(\kappa, \lambda)}$ gewisse ganzzahlige Polynome in $D^{(1)} x, \dots, D^{(\kappa)} x$ sind. — Nun seien y_1, \dots, y_n Elemente von K . Die Determinante

$$|D^{(\kappa)} y_i| = \begin{vmatrix} D^{(1)} y_1 & \dots & D^{(n)} y_1 \\ \vdots & & \vdots \\ D^{(1)} y_n & \dots & D^{(n)} y_n \end{vmatrix}$$

liefert für jedes System p, π ein bestimmtes Element $|D_\pi^{(\infty)} y_i|$ von K_p . Aus der dreieckigen Gestalt der Formeln (2) folgt sofort

$$|D_\pi^{(\infty)} y_i| = \left| (D_x^{(\infty)} y_i) \left(\frac{dx}{d\pi} \right)^\infty \right| = |D_x^{(\infty)} y_i| \left(\frac{dx}{d\pi} \right)^{1+\dots+n},$$

wofür kurz

$$|D_\pi^{(\infty)} y_i| = |D_x^{(\infty)} y_i| (dx)^{1+\dots+n}$$

geschrieben werden kann, da $|D_x^{(\infty)} y_i|$ ein nicht von p, π abhängiges Element von K ist. $|D_\pi^{(\infty)} y_i|$ stellt also einen wohlbestimmten Divisor aus der $(1+2+\dots+n)$ -ten Potenz der Differentialklasse dar, der gegenüber nichtsinguläre Transformation des Systems y_i invariant ist. Er hängt von x nicht ab.

Deuring (Leipzig).

Schilling, Otto F. G.: Zur algebraischen Theorie der Funktionenkörper mehrerer Variabler. J. reine angew. Math. 175, 1—5 (1936).

F. K. Schmidt hat (dies. Zbl. 9, 193) gezeigt, daß ein algebraischer Funktionenkörper einer Variablen N , der über einem Teilkörper k separabel galoissch ist, durch seinen Regularitätsbereich, d. i. die Gesamtheit der Primdivisoren von k , die in N voll zerfallen, dann eindeutig bestimmt ist, wenn über dem Konstantenkörper Ω von k der Hilbertsche Irreduzibilitätssatz gilt. Dies wird hier auch für Funktionenkörper mehrerer Variabler bewiesen, das Hauptgewicht liegt dabei wohl auf der Verallgemeinerung des Frobeniusschen Satzes: Die Gesamtheit der Zerlegungsgruppen aller Primdivisoren von N stimmt mit der Gesamtheit der Untergruppen der galoisschen Gruppe von N/k überein. Von allen Primdivisoren von N werden dabei, wie in der Theorie der algebraischen Funktionen von mehreren Variablen üblich, nur die betrachtet, die höchstdimensionalen Primealeen in den Ringen $\mathfrak{o}, \mathfrak{o}_i$ entsprechen, welche aus den in Beziehung auf $\Omega[x_1, \dots, x_n]$ bzw. $\Omega[x_1, \dots, x_i^{-1}, \dots, x_n]$ ganzen Größen von N bestehen (vgl. etwa B. L. van der Waerden, Math. Ann. 101, 293—311). Weiter wird die vom Ref. (dies. Zbl. 4, 290) entwickelte Charakterisierung der abelschen Körper über k durch Divisorenklassengruppen auf Funktionen von mehreren Veränderlichen übertragen.

Deuring (Leipzig).

Krull, Wolfgang: Linearformenmoduln und lineare Gleichungssysteme in unendlich vielen Variablen über einem diskret bewerteten, perfekten Körper. Mh. Math. Phys. 43, 463—476 (1936).

\Re sei diskret bewertet und perfekt (typisches Beispiel die p -adischen Zahlen). Der Ring \mathfrak{B} der ganzen Elemente enthält ein einziges Primideal, ein Hauptideal (p) . Ist $g > 1$ reell und gilt für α aus \Re $\alpha = e p^r$, e Einheit, so ist g^{-r} der absolute Betrag von α . Damit läßt sich die Konvergenz von Zahlenfolgen in \Re erklären. Eine unendliche Matrix $A = (a_{ik})$, $i, k = 1, 2, \dots$, mit Elementen aus \mathfrak{B} heißt zeilenkonvergent (z.k.), wenn jede Zeile Nullfolge ist. Ersetzt man jedes a_{ik} durch seine Restklasse \bar{a}_{ik} im Körper $K = \mathfrak{B}/(p)$, so erhält man eine zeilenfinite Matrix \bar{A} . \bar{A} besitzt dann und nur dann eine eindeutige z.k. Reziproke, wenn \bar{A} sie

besitzt. Die z.k. Matrizen führen die z.k. Linearformen $l(x) = \sum_1^\infty a_i x_i$, a_i aus \mathfrak{B} ,

$|a_i| \rightarrow 0$, in ebensolche über. Eine Menge von z.k. Linearformen heißt Modul, wenn sie mit $l_1(x), l_2(x), \dots$ auch jede gleichmäßig konvergente Summe $c_1 l_1(x) + c_2 l_2(x) + \dots$, c_i aus \mathfrak{B} , enthält. Ähnlich wie bei O. Toeplitz [Rend. Circ. mat. Palermo 28, 88—96 (1909)] beweist man, daß es eine umkehrbare z.k. Transformation $y = Ax$ gibt, die einen vorgegebenen Modul in einen solchen mit einer Basis $(p^{e_1} y_{v_1}, p^{e_2} y_{v_2}, \dots)$ überführt. Ist τ_n die Anzahl der $\varrho_i = n$ und ist d (der Defekt) gleich der Anzahl der unter den y_{v_1}, y_{v_2}, \dots nicht vorkommenden y_i , so gilt: Zwei Moduln sind dann und nur dann durch eine umkehrbare z.k. Transformation ineinander überführbar, wenn sie

gleiche Invarianten τ_n und d haben. Sei schließlich (1) $l_i(x) = a_{i0} + l_i(x) = a_{i0} + \sum_{k=1}^\infty a_{ik} x_k = 0$

ein z.k. Gleichungssystem mit a_{i0}, a_{ik} aus \mathfrak{B} . Es hat dann und nur dann eine ganzzahlige Lösung, wenn für alle ganzen c_i , alle N, r aus $\sum_1^N c_i l_i(x) \equiv 0 (p^r)$ stets

$\sum c_i l_i(x) \equiv 0(p^r)$ folgt. Ist (1) lösbar, so kann man es durch Übergang zu einem äquivalenten System und durch eine umkehrbare z.k. Transformation $y = Ax$ auf die Diagonalgestalt $c_i + p^{e_i} y_{v_i} = 0$ bringen mit $c_i \equiv 0(p^{e_i})$, aus der man die Lösungen sofort abliest.

Köthe (Münster i. W.).

Daus, P. H.: Ternary continued fractions in a cubic field. Tôhoku Math. J. 41, 337—348 (1936).

Es handelt sich um folgenden Algorithmus: Gegeben seien drei reelle Zahlen U_1, V_1, W_1 und eine (abbrechende oder ins Unendliche fortlaufende) Folge von Paaren ganzer rationaler Zahlen $p_1, q_1; p_2, q_2; \dots$. Man bilde eine Folge von Zahlentupeln U_k, V_k, W_k auf Grund der Rekursionsformeln

$$U_{k+1} = V_k - p_k U_k, \quad V_{k+1} = W_k - q_k U_k, \quad W_{k+1} = U_k \quad (k = 1, 2, \dots);$$

ferner eine Folge von Tripeln ganzer rationaler Zahlen A_k, B_k, C_k auf Grund der Rekursionsformeln

$$\begin{aligned} A_k &= q_k A_{k-1} + p_k A_{k-2} + A_{k-3} \\ B_k &= q_k B_{k-1} + p_k B_{k-2} + B_{k-3} \\ C_k &= q_k C_{k-1} + p_k C_{k-2} + C_{k-3} \end{aligned} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

in Verbindung mit den Anfangsbedingungen

$$\begin{pmatrix} A_{-2} & A_{-1} & A_0 \\ B_{-2} & B_{-1} & B_0 \\ C_{-2} & C_{-1} & C_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alsdann sagt Verf., das Tripel (U_1, V_1, W_1) sei in den ternären Kettenbruch

$$(U_1, V_1, W_1) = (p_1, q_1; p_2, q_2; \dots)$$

entwickelt, und nennt (p_k, q_k) den k -ten Partialquotienten, das Tripel U_k, V_k, W_k den k -ten vollständigen Quotienten und das Tripel (A_k, B_k, C_k) das k -te Näherungstripel. Entwicklungen, bei denen die Beträge der U_k eine nicht zunehmende und die Beträge der A_k, B_k, C_k je eine nicht abnehmende Folge bilden, heißen regulär. Im allgemeinen gestattet ein vorgelegtes Tripel U_1, V_1, W_1 mannigfache reguläre Entwicklungen. — Nun sei K ein kubischer Zahlkörper mit negativer Diskriminante, θ eine ihn erzeugende ganze Zahl, $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ (p, q, r ganz rational) ihre Gleichung. Eine Basis für die ganzen Zahlen von K kann in der Gestalt $1, \theta, \omega = a + b\theta + \theta^2/c$ mit ganzen rationalen a, b, c angenommen werden. Die Bestimmung der Einheiten von K ist bekanntlich gleichbedeutend mit der Bestimmung der Lösungen der Diofantischen Gleichung $N(x + \theta y + \omega z) = \pm 1$. Ist x, y, z ein Punkt auf der Asymptotenlinie dieser Fläche, so ist

$$x : y : z = q - a + p\theta + \theta^2 : p - b + \theta : c.$$

Dies veranlaßt zur Betrachtung der ternären Kettenbruchentwicklung des Zahlentripels $U_1 = c, V_1 = p - b + \theta = \mu, W_1 = q - a + p\theta + \theta^2 = \lambda$. Verf. stellt einige Sätze für den Fall auf, daß (c, μ, λ) periodische Entwicklungen besitzt, d. h. solche, bei denen die Zahlenpaare p_k, q_k sich periodisch wiederholen, und findet weiter gegenseitige Beziehungen zwischen den Entwicklungen des genannten Tripels und denen des Tripels $(1, \theta, \omega)$. Die Arbeit schließt mit einer Tafel ausgerechneter Beispiele.

Bessel-Hagen (Bonn).

● **Due, L. C.: Die Brückenverbindungstheorie und ihre Anwendung zur Klasseneinteilung und Klassenzusammensetzung quadratischer Irrationalzahlen und binärer quadratischer Formen.** Kopenhagen: Levin & Munksgaard 1936. 40 S. Kr. 4.50.

Das kleine Buch bringt einen Teil der bekannten Theorien der quadratischen Irrationalzahlen und der quadratischen Formen in einer Darstellung, die von den üblichen etwas abweicht. Entwickelt man eine Irrationalzahl $G_1 = \frac{b_1 + \sqrt{D}}{a_1}$ in einen Kettenbruch und ist $G_1 \simeq q_1, q_2, \dots, q_r, q_{r+1} + \frac{b + \sqrt{D}}{a} = q_{r+1} + G$, so soll G_1 mit G

durch eine Brücke verbunden heißen. (Es braucht keine reguläre Kettenbruchentwicklung vorzuliegen.) Es sind a, a_1, b, b_1, D ganz und $b^2 \equiv D(a)$, $b_1^2 = D(a_1)$. Von diesem Zusammenhang aus wird alles Weitere erörtert. Zwei quadratische Irrationalzahlen gehören zur gleichen Klasse, wenn sie durch eine Brücke verbunden sind. Es wird untersucht, ob 2 quadratische Irrationalzahlen obiger Art durch eine Brücke verbunden sind. Wenn 2 reduzierte Irrationalzahlen durch eine Brücke verbunden sind, dann gehören sie zum gleichen Periodenkreis. Aus der Brückenverbindungstheorie gewinnt man die Komposition der Klassen quadratischer Irrationalzahlen, ferner einen Aufbau der binären quadratischen Formen. Kurz werden auch komplexe quadratische Irrationalzahlen besprochen.

Hofreiter (Wien).

Oppenheim, A.: The minima of positive quaternary Hermitian forms. *Mh. Math. Phys.* 43, 407—409 (1936).

Sei h eine quaternäre positiv-definite Hermitesche Form in ganzzahligen Veränderlichen aus dem imaginär-quadratischen Körper $K(\sqrt{-m})$ ($m > 0$ quadratfrei), Δ die Determinante von h , L das Minimum von h in allen ganzzahligen Punkten außerhalb des Ursprungs. Durchläuft h alle genannten Formen, so hat der Quotient $\frac{L^4}{\Delta}$ ein Maximum $A(m, 4)$. Verf. schließt leicht aus einem Satz von Blichfeldt (s. dies. Zbl. 9, 244) über das Minimum positiv-definiten quadratischer Formen in acht Veränderlichen, daß

$$A(m, 4) \leq m^2 \quad \text{für} \quad m \equiv 3 \pmod{4}, \quad A(m, 4) \leq 16 m^2 \quad \text{sonst}$$

ist und beweist darüber hinaus durch Angabe expliziter Maximalformen, daß $A(1, 4) = 16$ und $A(m, 4) = m^2$ für durch die Form $a^2 + 2b^2$ darstellbare $m \equiv 3 \pmod{4}$ ist.

Mahler (Groningen).

Bell, E. T.: The form $2wx + xy + yz + zu + ux$. *Amer. J. Math.* 58, 282 bis 284 (1936).

m sei eine positive ungerade Zahl, $f(u)$ eine für alle ganzzahligen Werte von u definierte gerade Funktion. Dann gilt

$$\sum [(x+z)f(w-y) - zf(w+y)] = \sum_{r=1}^{\tau-1/2} \sum_{t=1}^{\tau-1/2} [rf(t) - tf(\tau+2-4r)];$$

hierbei ist die Summe linker Hand über alle der Gleichung $m = wx + xy + 2yz$ genügenden Quadrupel positiver ganzer Zahlen x, y, z, w zu erstrecken, die Summe rechter Hand über alle der Gleichung $m = t\tau$ genügenden Paare positiver ganzer Zahlen t, τ . Diesen Satz beweist Verf. durch Spezialisieren und Umformen einer in einer früheren Arbeit (s. dies. Zbl. 11, 215) bewiesenen Formel. Indem er den Satz auf die Funktion „ $f(u) = 1$ für alle ganzen u “ anwendet, ergibt sich der weitere Satz: Bezeichnet $N[n = F; *]$ die Anzahl der Darstellungen von n in der Gestalt F , wobei die ganzzahligen Variablen in F durch die Bedingungen * eingeschränkt sind, und bezeichnet $\zeta_r(m)$ die Summe der r -ten Potenzen der Teiler der natürlichen Zahl m , so gilt für ungerades m

$$\begin{aligned} \zeta_2(m) - (4m+1)\zeta_0(m) + 4\zeta_1(m) \\ = 8N[m = 2wx + xy + yz + zu + ux; \quad w, x, y, z > 0; \quad u \geq 0]. \end{aligned}$$

Über die Bedeutung dieses Resultats bemerkt Verf.: „This result is unusual in that it expresses the number of representations in an appropriately restricted indefinite form in five variables in terms of the divisors of the integer represented. There seems to be but one other similar result in the literature, stated in 1866 by Liouville (a proof of which will be published elsewhere).“

Bessel-Hagen (Bonn).

Blichfeldt, H. F.: A new upper bound to the minimum value of the sum of linear homogeneous forms. *Mh. Math. Phys.* 43, 410—414 (1936).

Es seien v_1, v_2, \dots, v_n r reelle und s Paare von komplexen Linearformen ($n = r + 2s$) in den Variablen x_1, x_2, \dots, x_n mit der Determinante D . Es gibt ganze

Zahlen $x_1, x_2, \dots, x_n \neq 0, 0, \dots, 0$, so daß für sie

$$|v_1| + \dots + |v_n| \leq \begin{cases} \left| \sqrt{\frac{2n}{\pi}} \left[\Gamma\left(1 + \frac{n+2}{2}\right) |D| \right]^{\frac{1}{n}}, & \text{wenn } r = 0, \\ \left| \sqrt{\frac{2n}{\pi}} \left[A^{\frac{r}{2}} \cdot B \cdot |D| \right]^{\frac{1}{n}}, & \text{wenn } r \geq 1. \end{cases}$$

Dabei ist

$$A = \frac{2(r+1)(r+2)}{3r(r+3)}, \quad B = 2 \cdot \frac{r+1}{r+3} \Gamma\left(1 + \frac{n+2}{2}\right).$$

Für spezielle Werte von s , z. B. $s = 1, 2$, lassen sich die Schranken bei geeigneter Wahl von A noch verbessern. Aus dem Satz ergeben sich Abschätzungen für die Diskriminante eines algebraischen Zahlkörpers, für das Volumen eines Parallelepipeds, das durch die ersten n Minima erzeugt wird, und für das Volumen von Oktaedern bei dichtester gitterförmiger Lagerung. Hofreiter (Wien).

Furtwängler, Ph.: Über Gitter konstanter Dichte. Mh. Math. Phys. **43**, 281—288 (1936).

Es sei in einem n -dimensionalen Raum mit den rechtwinkligen Achsen $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ ein n -dimensionales Gitter gegeben. Das Gitter \mathfrak{G} heißt von der konstanten Dichte g , wenn in jedem Einheitswürfel $u_i \leq \xi_i < u_i + 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$) stets g Gitterpunkte liegen. Für $n = 2$ und $n = 3$ wird bewiesen: Enthält \mathfrak{G} den Anfangspunkt, so lassen sich die definierenden Linearformen des Gitters in einer gewissen Reihenfolge ganzzahlig unimodular in die Gestalt transformieren:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{z_1}{g_1}, \\ \xi_2 &= c_{21} z_1 + \frac{z_2}{g_2}, \\ &\dots \dots \dots \\ \xi_n &= c_{n1} z_1 + \dots + c_{nn-1} z_{n-1} + \frac{z_n}{g_n}, \end{aligned}$$

wo $g_1 \cdot g_2 \cdot \dots \cdot g_n = g$ (g_i ganz). — Dieser Satz enthält als Spezialfall ($g = 1$) die Minkowskische Vermutung über die Grenzgitter. Aus dem obigen Satz ergibt sich ein Zerlegungssatz: Jedes solche Gitter \mathfrak{G} kann in g kongruente Gitter von der konstanten Dichte 1 zerlegt werden, die durch Parallelverschiebung ineinander übergehen.

Hofreiter (Wien).

Vandiver, H. S.: On trinomial diophantine equations connected with the Fermat relation. Mh. Math. Phys. **43**, 317—320 (1936).

Beweis des Satzes: Es sei $l > 3$ eine reguläre Primzahl und c eine zu l teilerfremde ganze Zahl, deren sämtliche Primfaktoren (mod. l) zu geraden Exponenten gehören und für die $c^{l-1} \not\equiv 1 \pmod{l^2}$, $c^{l-1} \not\equiv 2^{l-1} \pmod{l^2}$

ist. Dann hat die Gleichung $x^l + y^l = cz^l$ keine Lösungen in von Null verschiedenen ganzen rationalen Zahlen x, y, z .

Bessel-Hagen (Bonn).

Čudakov, N. G.: On zeros of the function $\zeta(s)$. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **1**, 201—204 (1936).

A fuller version of the paper reviewed in this Zbl. **13**, 200. The deduction of the improved prime-number theorem from Vinogradoff's theorem follows the classical lines.

E. C. Titchmarsh (Oxford).

Dickson, L. E.: Waring theorems of new type. Amer. J. Math. **58**, 241—248 (1936).

The form $a x^3 + b y^3$ is denoted by (a, b) and similarly for several variables (x, y, z, \dots) , which are restricted to integral values ≥ 0 . The author proves: (1) Every integer ≥ 0 is a sum of three values of any of the forms $(1, 1, j)$, $j = 1, 2, 5$; $(1, 2, k)$, $k = 2, \dots, 6$. (2) Every integer ≥ 0 is a sum of five values of $(1, 2)$ and every integer $\geq 11^{12}$ (19.006868) is a sum of five values of $(1, 5)$. A form is said to be universal if it represents every integer ≥ 0 . The author proves a theorem which gives 6344 universal forms; each

of these forms is the sum of nine products of a cube by a positive integer. The method is a direct generalisation of the classic one for nine cubes. *Wright* (Aberdeen).

Mengenlehre und reelle Funktionen.

Gillis, J.: On linearly measurable plane sets of points. *C. R. Soc. Sci. Varsovie* **28**, 49—70 (1936).

La théorie de la longueur d'ensembles plans conduit à la série des problèmes concernant les projections d'ensembles. L'auteur démontre les théorèmes suivants appartenant à cet ordre d'idées: 1° A étant un ensemble plan, mesurable linéairement et dont la densité inférieure dépasse en chaque point de A un nombre positif fixe, la limite

$$\lim_{r \rightarrow 0} [\text{mesure de la projection de } A \cdot c(a, r) \text{ sur } Ox] / L[A \cdot c(a, r)]$$

existe dans presque tout point a de A . Si, en outre, A_1 désigne un sous-ensemble mesurable de A dont la projection sur Ox est de mesure nulle, la limite en question est zéro dans presque tous les points a de A_1 ($c(a, r)$ désigne le cercle de centre a et de rayon r , $L(M)$ la mesure linéaire (longueur) au sens de Carathéodory de l'ensemble M , et on entend par densité supérieure et inférieure d'un ensemble A dans un point a respectivement la limite supérieure et inférieure de $L[A \cdot c(a, r)]/2r$, lorsque $r \rightarrow 0$). 2° A étant un ensemble plan, mesurable linéairement et de densité positive dans chaque son point, la limite

$$\lim_{r \rightarrow 0} [\text{mesure de la projection de } A \cdot c(a, r) \text{ sur la direction } \theta] / L[A \cdot c(a, r)]$$

existe dans presque tous les points a de A pour presque toutes les directions θ . Ces théorèmes permettent ensuite de compléter les résultats établis antérieurement par l'auteur [*Fundam. Math.* **22**, 57—69 (1934); ce *Zbl.* **8**, 344] pour les ensembles de densité supérieure $1/2$ en chacun de leurs points. — La démonstration est précédée par un exposé élémentaire des propriétés fondamentales de la mesure linéaire d'ensembles plans. A cette occasion l'auteur a simplifié les démonstrations de quelques théorèmes connus. *Saks* (Warszawa).

Gillis, J.: Note on the projection of irregular linearly measurable plane sets of points. *Fundam. Math.* **26**, 229—233 (1936).

L'auteur prouve qu'un ensemble plan parfait construit pour un autre but par A. S. Besicovitch [*Math. Ann.* **98**, 422—464 (1928)] jouit de la propriété suivante: cet ensemble étant lui-même de longueur positive, sa projection sur chaque droite et du tout point du plan (à distance finie ou à l'infini) est de mesure nulle. On n'a connu auparavant des ensembles parfaits de longueur positive possédant la même propriété par rapport à tout centre de projection excepté un. L'existence d'un point exceptionnel y a joué un rôle essentiel: on s'en est servi notamment pour montrer que les ensembles construits sont de longueur non-nulle; cela souligne l'intérêt du résultat de M. Gillis. *Saks* (Warszawa).

Miller, Edwin W.: On certain properties of Fréchet L -spaces. *Fundam. Math.* **26**, 116—119 (1936).

In seiner Erörterung der Beziehungen zwischen gewissen Abzählbarkeitseigenschaften Fréchet'scher L -Räume hat B. Dushnik (dies. *Zbl.* **10**, 13) zwei Fragen offen gelassen. Diese werden hier durch Konstruktion geeigneter L -Räume negativ erledigt. *Reinhold Baer* (Princeton, N. J.).

Vulich, B.: Un théorème sur les fonctions de classe 1. *Fundam. Math.* **26**, 202 bis 206 (1936).

En généralisant le critère classique de Baire pour qu'une fonction soit de classe 1, l'auteur démontre le théorème suivant: Pour qu'une fonction $f(x)$ finie sur un ensemble parfait P y soit de classe 1, il faut et il suffit que, pour tout

$\varepsilon > 0$ et pour tout ensemble parfait $H \subset P$, l'ensemble de points de H où l'oscillation supérieure de $f(x)$ (par rapport à H) surpasse ε , soit non dense dans H . Par oscillation supérieure de $f(x)$ dans un point $x_0 \in H$ (relativement à H) l'auteur entend la différence $M(x_0) - f(x_0)$, où $M(x_0)$ désigne le maximum (relatif à H) de $f(x)$ au point x_0 . *Saks (Warszawa).*

Kempisty, Stefan: Sur les fonctions partiellement continues. (2. congr. des math. roum., Turnu-Severin, 5.—9. V. 1932.) *Mathematica*, Cluj **9**, 93—102 (1935).

Plusieurs des théorèmes, concernant les fonctions quasi-continues de plusieurs variables et démontrés par l'auteur dans un travail antérieur (voir ce Zbl. **5**, 198), sont étendus ici aux fonctions définies dans les espaces métriques et complets. Il lui est possible d'en ajouter encore quelques autres par l'introduction des fonctions également quasi-continues, qui sont définies d'une manière analogue à la définition des fonctions également continues. L'application aux suites de fonctions donne des théorèmes connus d'Arzelà, de Baire et de Fréchet. *J. Ridder (Groningen).*

Leja, F.: Sur certaines fonctions d'ensemble dans un espace métrique quelconque. *C. R. Acad. Sci., Paris* **202**, 816—818 (1936).

The author gives an extension of the various set functions connected with the notion of the transfinite diameter (cf. Pólya-Szegő, this Zbl. **2**, 136) to an arbitrary metric space. The usual proofs do not require an essential modification. *G. Szegő.*

Analysis.

Wilkosz, W.: Une question concernant les fondements de la théorie des déformations continues. (2. congr. des math. roum., Turnu-Severin, 5.—9. V. 1932.) *Mathematica*, Cluj **9**, 89—92 (1935).

Die Funktionen $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$ seien in dem achsenparallelen Würfel W des x, y, z -Raumes stetig und mit partiellen Ableitungen erster Ordnung versehen; diese Ableitungen mögen außerdem die Gleichungen $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial w}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0$ in dem Würfel, evtl. mit Ausnahme einer Menge vom (räumlichen) Maß Null erfüllen. Mit Benutzung des Satzes von Looman-Menschoff über die Analytizität von Funktionen und die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen wird gezeigt, daß dann u, v, w lineare Funktionen der Gestalt $u = \alpha + az - by$, $v = \beta + bx - cz$, $w = \gamma + cy - az$ sind. Unter der Voraussetzung der Existenz und Stetigkeit der partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung war das Ergebnis schon bekannt. *Kamke (Tübingen).*

Landau, Edmund: Eine Frage über trigonometrische Polynome. *Ann. Scuola norm. super. Pisa*, II. s. **2**, 209—210 (1933).

En supposant que l'on a pour toute valeur réelle de φ $\sum_{\nu=0}^n a_\nu \cos \nu \varphi \geq 0$, $0 < a_0 < a_1$, $a_\nu \geq 0$ pour $2 \leq \nu \leq n$, l'auteur propose de déterminer le minimum P_n ($n \geq 2$) de $\frac{1}{a_1 - a_0} \sum_{\nu=0}^n a_\nu$. Il montre que $P_2 = 7$, $P_3 = P_4 = P_5 = 6$. *Bernstein.*

Landau, Edmund: Nachtrag zu meiner Arbeit: „Eine Frage über trigonometrische Polynome.“ *Ann. Scuola norm. super. Pisa*, II. s. **5**, 141 (1936).

L'auteur indique qu'il vient de prendre connaissance d'un travail de M. Tchakaloff [Jb. Univ. Sofia **19**, 355—384 (1923)], „Trigonometrische Polynome mit einer Minimumeigenschaft“, écrit en bulgare où celui ci avait démontré non seulement les résultats contenus dans la Note de l'auteur, „Eine Frage über trigonometrische Polynome“ (*Ann. Scuola norm. super. Pisa*, II. s. **2**, 209—210), mais avait déterminé également les valeurs de P_6 et $P_7 = P_8 = P_9 (< P_6)$. *S. Bernstein (Leningrad).*

Keldysch, M.: Sur les suites de polynômes bornés dans leur ensemble. Rec. math. Moscou 42, 719—723 (1935).

L'auteur démontre la proposition suivante: Soit $f(z)$ une fonction bornée définie sur la circonférence $|z| = 1$, satisfaisant aux conditions 1° la partie réelle et la partie imaginaire de $f(z)$ sont des fonctions de première classe de Baire, 2° $\int_C f(z) z^n dz = 0$

($n = 0, 1, 2, \dots$), 3° l'ensemble des points de discontinuité de $f(z)$ est de mesure nulle; il existe alors une suite de polynômes $P_n(z)$ bornée dans leur ensemble qui converge vers $f(z)$ pour $|z| = 1$.
S. Bernstein (Leningrad).

Keldysch, M., et M. Lavrentieff: Sur les suites de polynômes harmoniques. C. R. Acad. Sci., Paris 202, 1149—1151 (1936).

The authors announce a series of very interesting results on the class of functions $U(x, y, z)$ representable in the unit sphere S as the limits of sequences of harmonic polynomials. The authors give three equivalent conditions for a function U to belong to that class. The simplest among them is the following: U should be of the first class of Baire in S and be harmonic over the whole of S except at most on an enumerable infinity of Jordan surfaces. Two other conditions are stated in terms of a certain topological property (M^*) of sets. There is also given a condition, necessary and sufficient, for a set to be the set of irregular points of a converging sequence of harmonic polynomials. Besides these results, there are announced a few lemmas, interesting by themselves; e.g. If E is either a simple Jordan surface (i. e. a homeomorphic image of the closed unit circle), or a bounded closed set of measure zero which does not disconnect the space; then any continuous function on E may be uniformly approximated on E by a sequence of harmonic polynomials. — The analogous problems for sequences of holomorphic functions were previously investigated by one of the authors [Lavrentieff, C. R. Acad. Sci., Paris 186, 1634 (1928)], and by Hartogs and Rosenthal [Math. Ann. 100, 212—263 (1928); 104, 606—610 (1931); this Zbl. 1, 213]. Saks (Warszawa).

Kolmogoroff, A.: Über die beste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionenklasse. Ann. of Math., II. s. 37, 107—110 (1936).

Let $\varrho(f, \varphi)$ be the "distance" of the functions f and φ . Let f be a fixed function and

$$E_n(f) = \text{lower bound of } \varrho(f, c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \dots + c_n\varphi_n)$$

where the φ_ν are given and the constants c_ν vary. Finally considering a certain family F of functions f let $E_n(F)$ be the upper bound of $E_n(f)$. The question is: What is the lower bound of $E_n(F)$ if the functions φ_ν vary. The author gives the solution of this interesting problem in the case

$$\varrho(f, \varphi) = \left\{ \int_0^1 (f - \varphi)^2 dx \right\}^{1/2}$$

if F is the set of all functions f with a p -th derivative and $\varrho(f^{(p)}, 0) \leq 1$. Still simpler is the discussion of the subset of F satisfying the additional condition $f^{(v)}(0) = f^{(v)}(1)$, $v = 0, 1, 2, \dots, p-1$.
G. Szegő (St. Louis, Mo.).

Natanson, J.: Sur la représentation des fonctions par des formules analogues à la formule de Fourier. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 4, 307—310 (1935).

Let (*) $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \Phi(t, x; n) dt$ where $\Phi(t, x; n) = \int_t^n K(t, x, z) dz$. Hence, if the interchange of the order of integrations is permissible, (**) $f(x) = \int_t^\infty dz \int_a^b f(t) K(t, x, z) dt$.

This leads the author to observe that conditions on Φ for the validity of (*) can be formulated as conditions on K for the validity of (**). Several examples illustrate this idea.
J. D. Tamarkin (Providence, R. I.)

Cibrario, Maria: Rapporti tra serie di polinomi sferici generalizzati e serie trigonometriche. Boll. Un. Mat. Ital. **15**, 77—82 (1936).

En se basant sur la généralisation des formules de Mehler pour les polynômes ultrasphériques $C_n^\nu(x)$ ($\nu > 0$), donnée par Tricomi [Boll. Un. Mat. Ital. **14**, 213—218 et 277—282 (1935); ce Zbl. **13**, 159] l'Au. établit le résultat suivant: si $\psi(s) = \sum_0^\infty a_n C_n^\nu(s)$ pour la fonction $\Phi(t) = \int_t^1 \psi(s)(s-t)^{-\nu}(1-s^2)^{\nu-\frac{1}{2}} ds$, $-1 < t < 1$, $0 < \nu < 1$, on a le développement

$$\Phi(t) = \frac{2^{1-\nu}\pi}{\Gamma^2(\nu)\sin\nu\pi} \sum_0^\infty \frac{\Gamma(n+2\nu)}{n!(n+\nu)} a_n \sin(n+\nu) \arccos t,$$

sous certaines conditions d'intégrabilité et de convergence. L'Au. applique ensuite ce résultat dans les développements de la fonction hypergéométrique en séries trigonométriques dans des cas particuliers pour les constantes. *N. Obrechhoff* (Sofia).

Plessner, A.: Über konjugierte trigonometrische Reihen. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **4**, 251—253 (1935).

The author sketches a proof of the following theorem: If a trigonometric series is $(C \cdot k)$ summable on a set M then its conjugate is $(C \cdot k)$ summable almost everywhere on M . The proof depends on the notion of a modified Cesàro summability $(C^* \cdot k)$ introduced by the author, and its relationship with the r -th generalized derivative (in the sense of Peano). This relationship is stated in several theorems without proof.

J. D. Tamarkin (Providence, R. I.).

Levinson, Norman: On the Poisson summability of Fourier series. Duke math. J. **2**, 138—146 (1936).

Let $f(x)$ be integrable and periodic of period 2π , and $\varphi(x) = f(y+x) + f(y-x) - 2s$. Let $E(m, \alpha)$, $E^{-1}(m, \alpha)$, $P(m)$ represent, respectively, the following statements.

$$E(m, \alpha) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 1/\varepsilon \int_0^1 (x/\varepsilon)^\alpha \exp\{-(x/\varepsilon)^{1+m}\} \varphi(x) dx = 0, \quad m > -1, \alpha \geq 0;$$

$$E^{-1}(m, \alpha) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \int_0^1 (\varepsilon/x)^\alpha \exp\{-(\varepsilon/x)^{1+m}\} \varphi(x) \frac{dx}{x^2} = 0, \quad m > -1, \alpha \geq 0;$$

$$P(m) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 1/\varepsilon \int_0^1 \{(x/\varepsilon)^2(1+m) + 1\}^{-1} \varphi(x) dx = 0, \quad m > -1/2.$$

The author proves: $E(n, \alpha)$ for $n > m$ and $\alpha \geq 0$, or $E(m, \alpha)$ for $\alpha > 0$ implies $P(m)$, while $P(m)$ implies $E(n, \alpha)$ for $m > n$. The same conclusion holds if E is replaced by E^{-1} . These results are analogues, for the Poisson summability, of the known results concerning necessary and sufficient conditions for the Cesàro summability. The proof depends on a Tauberian theorem of Wiener's type, and on extended use of Fourier-Mellin transforms.

J. D. Tamarkin (Providence, R. I.).

Mayrhofer, K.: Über Partialbruchreihen. Mh. Math. Phys. **43**, 503—507 (1936).

L'auteur étend partiellement aux séries $\sum_{\nu=1}^\infty \frac{c_\nu}{(a_\nu - x)^\alpha}$ (dans lesquelles les a_ν tendent en croissant vers l'infini) les résultats relatifs à la série $\sum \frac{c_\nu}{a_\nu - x}$, donnés dans deux articles [Mh. Math. Phys. **42**, 191—206 et 207—209 (1935); ce Zbl. **11**, 254]. Si une telle série est convergente pour deux valeurs distinctes ξ et η de x , elle est convergente pour toute valeur $x \neq a_\nu$. L'auteur démontre d'abord que sous cette hypothèse la série $\sum_{\nu=1}^\infty \frac{c_\nu}{(a_\nu - \xi)^\lambda (a_\nu - \eta)^{n-\lambda}}$ est convergente. La conclusion résulte alors d'une décomposition de l'élément $\frac{1}{a^\nu - x}$ et de l'application du critère de convergence d'Abel.

E. Blanc (Paris).

Differentialgleichungen, Potentialtheorie:

Lijn, Gaston van der: Sur l'intégration approchée des équations différentielles. Mém. Soc. Roy. Sci. Liège, III. s. 20, fasc. 2, 1—87 (1935).

Verf. nennt eine Funktion $y = \varphi(x)$ im Intervall $x_0 \leq x \leq x_1$ ein ε -Näherungsintegral (intégrale approchée à ε près) der Differentialgleichung

$$y' = f(x, y), \quad (1)$$

wenn $\varphi(x)$ stetig ist und die Menge der Punkte x , für die $|\varphi' - f(x, \varphi)| \leq \varepsilon$ gilt, in jedem Teilintervall $x_0 \leq x \leq \xi$ eine mittlere untere Dichte $\geq 1 - \varepsilon$ besitzt. — Ist $f(x, y)$ in dem Rechteck R ($a < x < b$, $c < y < d$) fast überall definiert und endlich, sowie in R meßbar und in dem Punkt $P_0(x_0, y_0)$ approximativ stetig, so hat die Gleichung (1) für jedes $\varepsilon > 0$ in dem Intervall $x_0 \leq x < b$ mindestens ein ε -Näherungsintegral $\varphi(x)$ mit dem Anfangswert $\varphi(x_0) = y_0$, das überall beschränkte rechte Derivierte hat und fast überall differenzierbar ist. Entsprechendes gilt für $a < x \leq x_0$. Ein Beispiel zeigt, daß der Satz für $\varepsilon = 0$ unter diesen weiten Voraussetzungen nicht mehr gilt. — Die stetigen Funktionen $\varphi(x)$, die 0-Näherungsintegrale sind, d. h. die fast überall differenzierbar sind und fast überall die Gleichung (1) erfüllen, heißen approximative Integrale. Über sie wird folgender Existenzsatz bewiesen: Die Funktion $f(x, y)$ sei in R beschränkt, etwa $m \leq f \leq M$; abgesehen von den Punkten einer Menge J , deren Projektion J_x auf die x -Achse eine Nullmenge bildet, sei f approximativ stetig; abgesehen von einer auf der x -Achse liegenden Nullmenge sei $f(x, y)$ stetig in bezug auf y . Wird

$$\delta = \text{Min} \left(\frac{d - y_0}{|m|}, \frac{d - y_0}{|M|}, \frac{y_0 - c}{|m|}, \frac{y_0 - c}{|M|} \right)$$

gesetzt, so gibt es in dem Intervall $\langle x_0, x_0 + \delta \rangle$ mindestens ein approximatives Integral $\varphi(x)$ mit dem Anfangswert $\varphi(x_0) = y_0$. Unter diesen approximativen Integralkurven gibt es eine höchste und eine tiefste. Gibt es durch jeden Punkt eine höchste und eine tiefste Integralkurve, so hängt diese stetig von dem Anfangspunkt ab in den über bzw. unter ihr liegenden Bereichen. Erfüllt f für fast alle x eine Lipschitzbedingung, so gilt wieder die bekannte Abschätzungsformel. Weiter gilt auch hier ein Rosenblatt-Nagumoscher sowie ein Peanoscher Satz über die eindeutige Bestimmtheit der Integralkurven. — Die Existenz-, Abschätzungs- und Stetigkeitssätze lassen sich auf Systeme von Differentialgleichungen ausdehnen. Unter den Voraussetzungen, welche die Existenz approximativer Integrale sichern, gilt wieder der Knesersche Satz, daß der Durchschnitt jeder Ebene $x = \xi$ mit der Gesamtheit der von einem Punkt ausgehenden Integralkurven ein Kontinuum ist. — In einem Anhang wird gezeigt: Hat die Gleichung (1) für eine beschränkte Funktion $f(x, y)$ durch jeden Punkt genau eine Integralkurve, so gehört f zur ersten Baireschen Klasse. Ist f beschränkt, die vorher erwähnte Menge J_x wieder eine Nullmenge, und erfüllt f eine Lipschitzbedingung, so hat (1) durch einen Punkt P_0 genau dann eine einzige Integralkurve, wenn die Grenzkurve der ε -Näherungskurven durch P_0 , deren Derivierte zwischen den Schranken von f liegen, für $\varepsilon \rightarrow 0$ eine Integralkurve von (1) ist. Kamke.

Ważewski, T.: Sur les intégrales premières de l'équation $P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$. (2. congr. des math. roum., Turnu-Severin, 5.—9. V. 1932.) Mathematica, Cluj 9, 179—181 (1935).

Bericht über die Lösbarkeit der Differentialgleichung

$$P(x, y) \frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

„im Großen“. Bisher nicht veröffentlicht war folgendes: Haben P und Q in dem einfach zusammenhängenden Gebiet \mathfrak{G} stetige partielle Ableitungen erster Ordnung und ist durchweg $P^2 + Q^2 > 0$, so gibt es für jedes total in \mathfrak{G} liegende Gebiet g ein Hauptintegral der Gleichung (1) [vgl. Kamke, Math. Z. 41, 56 (1936); dies. Zbl. 13, 264]. Hat \mathfrak{G} eine Randkurve mit stetiger Tangente und haben P, Q mit ihren ersten Ab-

leitungen bei Annäherung an den Rand wohlbestimmte Grenzwerte, so gibt es Hauptintegrale für das ganze Gebiet \mathfrak{G} . Für die Gleichung

$$P(x, y, z) \frac{\partial w}{\partial x} + Q(x, y, z) \frac{\partial w}{\partial y} + R(x, y, z) \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

mit $P^2 + Q^2 + R^2 > 0$ kann dagegen die Existenz von Hauptintegralen nicht einmal für jedes total in \mathfrak{G} liegende Teilgebiet behauptet werden. *Kamke* (Tübingen).

Drinfeld, G.: Sur les invariants intégraux et les fonctions contravariantes. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 22, 34—39 (1936).

The author derives two theorems concerning integral invariants (for definitions and fundamental theorems see De Donder, Théorie des invariants intégraux) of the system $dx^i/dt = X^i(x^1, \dots, x^n)$, $i = 1, \dots, n$, and applies these together with known theorems to the case $n = 4$. As an example of the results obtained: In order that $\int_{i=1}^k \lambda_i \Omega_{p_i}$, where the Ω_{p_i} are invariant integral forms of the given system and are linearly independent, be an invariant integral of the given system, it is necessary and sufficient that the functions $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, be invariants of the system. *Hedlund*.

Erouguine, N.: Sur la substitution exposante pour quelques systèmes irréguliers. Rec. math. Moscou 42, 745—752 (1935).

Les travaux de Lappo-Danilevski (ce Zbl. 9, 350; 11, 349) donnent une grande possibilité pour poser et résoudre beaucoup de problèmes importants concernant les propriétés des systèmes différentiels linéaires et des fonctions de matrices. Dans cet ordre d'idées sont écrits récemment plusieurs travaux, par ex. le travail de Schiefner (ce Zbl. 13, 61), le mém. en question de Erouguine et les deux travaux suivants de Werjbitzky. — Il s'agit ici du système d'équations différentielles $\frac{dY}{dx} = Y \sum_{p=-s}^{\infty} T_p x^p$,

considéré dans le mémoire III de L.-D. (pour les notations voir loc. cit.); T_p et Y sont les matrices du degré n . L.-D. a construit pour ce système la matrice exposante W dans une forme de série de compositions des matrices T_p mais seulement dans le domaine $\sum_{p=-s}^{\infty} \|T_p\| \leq \|\varrho\|$ ($\varrho > 0$ assez petit); la question du prolongement analytique et des singularités de W était restée ouverte. E. étudie le cas des matrices du second degré. Dans ce cas il peut effectuer tous les calculs sous forme explicite et obtenir une représentation générale pour W . On voit que W est une fonction multiforme des T_p ; ses singularités sont étudiées. Des exemples suivent. — Dans un travail encore inédit l'auteur considère les matrices de l'ordre général n .

Janczewski (Leningrad).

Werjbitzky, B.: La convergence absolue des séries potentielles de plusieurs matrices. Rec. math. Moscou 42, 725—735 u. franz. Zusammenfassung 736 (1935) [Russisch].

Compléments au mémoire I de Lappo-Danilevski (ce Zbl. 9, 350). On étudie la série des compositions de matrices $X_1 \dots X_m$ (voir loc. cit.):

$$F(X_1, X_2, \dots, X_m) = \alpha_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1, 2, \dots, j_\nu}^{(1, 2, \dots, m)} X_{j_1} \dots X_{j_\nu} \alpha_{j_1 j_2 \dots j_\nu} \quad (1)$$

et on cherche des conditions suffisantes de la convergence basées sur la comparaison de la série (1) avec une série „scalaire“ correspondante. Pour $m = 1$ L.-D. a donné un théorème de cette sorte, mais dans le cas de m général la série „scalaire“ était chez L.-D. aussi avec une seule variable indépendante. Werjbitzky introduit comme série de comparaison une série avec m variables. Soient $|X_i| < \|\varrho_i\|$,

$$\Phi(|X_1|, \dots, |X_m|) = |\alpha_0| + \sum_{\nu=1}^{\infty} |X_{j_1}| \dots |X_{j_\nu}| |\alpha_{j_1 \dots j_\nu}|, \quad (2)$$

$$\varphi(\xi_1 \dots \xi_m) = |\alpha_0| + \sum_{\nu=1}^{\infty} \xi_1^{\nu_1} \dots \xi_m^{\nu_m} \sigma_{\nu_1 \dots \nu_m} \quad (3)$$

où la série (3) est obtenue de (2) en remplaçant les matrices $|X_j|$ par les nombres ζ_j . Alors si $\{R_i\}$ est un système de rayons de convergence de (3), la série (1) est absolument convergente dans le domaine $|X_i| < \left\| \frac{R_i}{n} \right\|$. L'auteur donne ensuite quelques conditions de convergence plus spéciales, par ex. la condition nécessaire et suffisante de la convergence d'une série de deux matrices commutatives, etc. Les conditions de W. et de L.-D. ne couvrent pas chacune l'autre. *Janczewski* (Leningrad).

Werjbitzky, B.: La simplification des séries de plusieurs matrices. Rec. math. Moscou 42, 737—742 u. franz. Zusammenfassung 743 (1935) [Russisch].

Dans son Mémoire I Lappo-Danilevski (ce Zbl. 9, 350) donne pour une série de compositions de m matrices du 2^{me} ordre une généralisation de la formule de Lagrange-Sylvester (à l'aide de laquelle une fonction d'une seule matrice X peut être représentée par un polynôme en X). En introduisant des matrices et des séries de compositions „réduites“ par des procédés spéciaux, l'auteur obtient une généralisation de cette formule valable pour les séries de m matrices de l'ordre général.

Janczewski (Leningrad).

Faxén, O. H.: Über eine Differentialgleichung aus der physikalischen Chemie. II. Ark. Mat. Astron. Fys. 25 B, Nr 13, 1—4 (1936).

Das Problem führt auf eine lineare Randwertaufgabe bei einer parabolischen Differentialgleichung mit nichtkonstanten Koeffizienten. Diese Aufgabe hatte Verf. in einer früheren Mitteilung [Ark. Mat. Astron. Fys. 21 B, Nr 3 (1929)] durch Zurückführung auf eine Integralgleichung behandelt. In der vorliegenden Mitteilung wird die Lösung der Randwertaufgabe als Fouriersches Doppelintegral in der Mellinschen Form angesetzt und dessen Integrand vollständig bestimmt. *E. Rothe* (Breslau).

Kasner, Edward: Biharmonic functions and certain generalizations. Amer. J. Math. 58, 377—390 (1936).

Verf. nennt nach Poincaré eine Funktion $F(x, y, x_1, y_1)$ biharmonisch, wenn sie der Realteil einer analytischen Funktion von $x + iy$ und $x_1 + iy_1$ ist. Werden vermöge einer Transformation T x_1, y_1 Funktionen von x, y , so sei K die auf diese Weise aus F entstehende Funktion von x, y . Verf. beweist zunächst: Dann und nur dann ist F biharmonisch, wenn für jedes konforme T K harmonisch ist; ist K harmonisch für jedes biharmonische F , so ist T konform. Des weiteren betrachtet Verf. gewisse Untergruppen bzw. Teilmengen der konformen Gruppe und untersucht, für welche Funktionen F die Funktion K bei jeder Transformation T der betrachteten Untergruppe harmonisch ausfällt. Die entsprechende Untersuchung wird für anti-biharmonische und entgegengesetzt (reverse) konforme Abbildungen vorgenommen. Dabei heißt F antibiharmonisch, wenn F Realteil einer analytischen Funktion von $x + iy$ und $x_1 - iy_1$ (oder $x - iy$ und $x_1 + iy_1$) ist, und T heißt entgegengesetzt konform, wenn $x_1 + iy_1$ eine analytische Funktion von $x - iy$ ist. Schließlich werden Gruppen bzw. Mengen von Transformationen betrachtet, die sowohl eigentlich wie entgegengesetzt konforme Abbildungen enthalten. *E. Rothe* (Breslau).

Šerman, D. I.: Contribution à la méthode de N. I. Muschelišvili dans le problème plan de la théorie d'élasticité. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 1, 205—210 (1936).

Pour la méthode de Muschelišvili voir d'abord ce Zbl. 5, 358; plus tard [C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 3, 7—11, 73—78 (1934)] M. a trouvé encore une voie plus simple pour réduire les problèmes fondamentaux de la théorie d'élasticité à un système d'équations intégrales d'une forme très élémentaire. Šerman a utilisé cette dernière méthode pour l'étude du premier problème fondamental — déterminer les déplacements et les tensions d'après les forces extérieures données sur la frontière [Publ. Inst. Seismol. Acad. Sci. URSS 53 (1935)]. Mais il considérerait là le théorème d'existence comme prouvé antérieurement. Dans la note présente il donne la démonstration dudit théorème d'existence, en partant directement des équations de Muschelišvili, qu'il transforme en une nouvelle forme convenable au cas considéré. *Janczewski*.

Spezielle Funktionen:

Kershner, Richard, and Aurel Wintner: On the boundary of the range of values of $\zeta(s)$. Amer. J. Math. 58, 421—425 (1936).

The problem of the set of values attained by $\zeta(s)$ on certain lines is studied afresh by means of supporting functions (Stützfunktionen). It is shown, for example, that the outer boundary of the closure of the values attained by $\log \zeta(s)$ on a fixed line $\sigma = \sigma_0 > 1$ is a regular analytic curve. See Haviland, this Zbl. 7, 222. *Titchmarsh*.

Koshliakov, N.: On an extension of some formulae of Ramanujan. Proc. London Math. Soc., II. s. 41, 26—32 (1936).

The following analogues to a result of Ramanujan are proved. Let $\tau(n)$ be the number of the divisors of n ,

$$\sigma(x) = -\gamma - 1/2 \log x - (4\pi x)^{-1} + \pi^{-1} x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{x^2 + n^2},$$

γ being Euler's constant. Let further (J_0 = Bessel function)

$$\Phi(a) = 1/4 \int_0^{\infty} \left\{ J_0 \left(e^{-\frac{i\pi}{4}} a \sqrt{x} \right) + J_0 \left(e^{\frac{i\pi}{4}} a \sqrt{x} \right) \right\} \sigma(\sqrt{x}) dx,$$

$$\Psi(a) = -i/4 \int_0^{\infty} \left\{ J_0 \left(e^{-\frac{i\pi}{4}} a \sqrt{x} \right) - J_0 \left(e^{\frac{i\pi}{4}} a \sqrt{x} \right) \right\} \sigma(\sqrt{x}) dx - a^{-2}.$$

We have then for $a > 0$, $b > 0$, $ab = 4\pi^2$,

$$a^{3/2} \int_0^{\infty} x J_0(ax) \{ \sigma(x) + (4\pi x)^{-1} \} dx = f(a) = f(b),$$

$$\frac{\Psi(a) + \Phi(a)}{\Psi(b)} = \frac{\Psi(a) - \Phi(a)}{\Phi(b)} = \sqrt{2} a^{-3/2} b^{3/2}.$$

Finally a representation of $\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) n^{4m+1} \sigma(n)$ is given in terms of Bernoullian numbers and some values of $\zeta'(s)$, m positive integer. *G. Szegő* (St. Louis, Mo.).

Shastri, N. A.: An indefinite integral involving the square of the parabolic cylinder function. Tôhoku Math. J. 41, 411—414 (1936).

The author seeks expressions in terms of definite integrals for the indefinite integral involving the square of a parabolic cylinder function:

$$\int D_n^2(z) dz$$

where D_n satisfies the differential equation:

$$d^2 D/dz^2 + (n + 1/2 - 1/4z^2) D = 0$$

To accomplish this aim, he makes use of the recursion formulas for D_n , of the well known definite infinite integral expressions for D_n and of an integral equation for D_n deduced previously. The result is:

$$\frac{1}{8\pi i^{2n-1}} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} e^{i(\Theta + \Phi)z/2} D_n(\Theta) d/dn \{ D_n(\Phi) \} (\Theta - \Phi) d\Phi d\Theta.$$

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Mehrotra, Brij Mohan: Two self-reciprocal functions. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. 18, 133—134 (1936).

It is shown that, if $f(x)$ is self-reciprocal in the cosine (or sine) transform, the functions

$$g(x) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-a\sqrt{2xy+a^2}}}{\sqrt{2xy+a^2}} f(y) dy, \quad g(x) = \int_{a^2/2x}^{\infty} \frac{\cos(a\sqrt{2xy-a^2})}{\sqrt{2xy-a^2}} f(y) dy$$

are self-reciprocal in the sine (or cosine) transform. *W. N. Bailey* (Manchester).

Meijer, C. S.: Einige Integraldarstellungen aus der Theorie der Besselschen und Whittakerschen Funktionen. II. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. **39**, 519–527 (1936).

This paper is a continuation of some previous work by the same author. (This Zbl. **13**, 307.) Integral representations are given for $K_\nu(z)$, $W_{k,m}(z)$, $W_{k,m}(z) W_{-k,m}(z)$, $K_\mu(z) K_\nu(z)$, $I_\nu(z) K_\mu(z)$, $I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)$ and $I_\nu(z) - I_{-\nu}(z)$. For example, under certain conditions,

$$W_{k,m}(z) W_{-k,m}(z) = \frac{z^{-2\alpha+1} \Gamma(2\alpha) \Gamma(\alpha+m) \Gamma(\alpha-m)}{2^{\alpha+\beta} \Gamma(\alpha+k+\frac{1}{2}) \Gamma(\alpha-k+\frac{1}{2}) \Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^\infty v^{\alpha+\beta} J_{\alpha+\beta-1}(v) \\ \times {}_4F_3\left(\alpha, \alpha+\frac{1}{2}, \alpha+m, \alpha-m; \alpha+k+\frac{1}{2}, \alpha-k+\frac{1}{2}, \alpha+\beta; -\frac{v^2}{z^2}\right) dv.$$

Numerous particular cases of the results are given, such as

$$W_{k,m}(z) W_{-k,m}(z) = \frac{\pi}{2 \cos m\pi} \int_0^\infty J_0(v) P_{m-\frac{1}{2}}^k\left(\sqrt{1+\frac{v^2}{z^2}}\right) P_{m-\frac{1}{2}}^{-k}\left(\sqrt{1+\frac{v^2}{z^2}}\right) v dv.$$

W. N. Bailey (Manchester).

Chisini, O.: Le funzioni ellittiche viste da un geometra. Rend. Semin. mat. fis. Milano **8**, 169–187 (1934).

Der Vortrag gliedert sich in zwei Teile. Im ersten Teile werden die Kreisfunktionen auf folgende Weise eingeführt: Nach einer Behandlung der gemischten Gruppe der Drehungen und Spiegelungen, welche einen Kreis in Ruhe lassen, wird ein Punkt p' des Kreises durch die Drehung π^u (π feste Drehung, u komplexer Exponent) charakterisiert, die einen festen Punkt p in p' transformiert. Die Koordinaten x, y des Punktes p' werden dadurch Funktionen von u , und es gelingt, diese Funktionen durch Methoden der qualitativen Analysis (nämlich dadurch, daß man die Nullstellen und Pole der Ableitung $dx:du$ auf synthetisch-geometrischem Wege gewinnt) zu bestimmen. Man findet $x = \cos u$, $y = \sin u$ und kann dann die Eigenschaften dieser Funktionen (Periodizität, Additionstheorem) weiter auf geometrischem Wege herleiten. — Zu diesen Überlegungen analog werden im zweiten Teile die Funktionen $\wp u, \wp' u$ an Hand einer ebenen Kurve 3. Ordnung eingeführt. Dabei treten an Stelle der Spiegelungen an den Durchmessern des Kreises die involutorischen Transformationen, die zwei Punkte der Kurve einander zuordnen, wenn ihre Verbindungslinie durch einen festen Punkt der Kurve läuft, an Stelle der Gruppe der Drehungen die von diesen involutorischen Transformationen erzeugte kontinuierliche Gruppe. Nacheinander werden dann gefunden: die Perioden der Funktionen $\wp u, \wp' u$, ihre Eigenschaft, gerade oder ungerade zu sein, das Abelsche Theorem (Anwendung auf die Bestimmung der Wendepunkte), Reihenentwicklung der Funktionen $\wp u, \wp' u$. E. A. Weiss.

Emde, Fritz: Zur Zahlenrechnung bei vollständigen elliptischen Integralen. Arch. Elektrotechn. **30**, 243–250 (1936).

An Stelle der Legendreschen Integrale E, K werden andere Normalintegrale B, C, D eingeführt, die manchmal Vorteile haben. Dabei ist $K - E = Dk^2$, $K - D = B$, $D - B = Ck^2$. Eine kleine Tabelle für B, C, D wird gegeben. Bodewig (Basel).

Integralgleichungen, Funktionalanalysis und Verwandtes:

Gunther, N.: Sur la fonction spectrale de certaines équations intégrales hermitiennes. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **4**, 315–318 (1935).

Extension of the Hilbert-Weyl-Carleman theory of spectral function to some Fredholm-Stieltjes integral equations. J. D. Tamarkin (Providence, R. I.).

Hardy, G. H., and E. C. Titchmarsh: New solution of an integral equation. Proc. London Math. Soc., II. s. **41**, 1–15 (1936).

The authors consider Milne's integral equation $f(x) = 1/2 \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{u} [f(x+u) - f(x-u)] du$

and prove that every solution $f(x)$ which is of the form $f(x) = \cosh x g(x)$ with

$\int_{-\infty}^{\infty} g^2(1 + (\log |g|)^2) dx < \infty$ is necessarily a quadratic. Under more stringent restrictions this result was proved in preceding papers by the authors [Proc. London Math. Soc., II. s. **23**, 1—26 (1923); **30**, 95—106 (1928)]. The proof is based on a chain of lemmas some of them being of independent interest. *J. D. Tamarkin.*

Coles, V. R.: Numerical solution of an integral equation. Philos. Mag., VII. s. **21**, 760—764 (1936).

Die in der Elektronentheorie auftretende Integralgleichung

$$G(v) = \int_v^{v+u_0-a} f(v - \Phi + u_0) F(\Phi) d\Phi,$$

wo $f(v)$, $G(v)$ gegebene, zweimal stetig differenzierbare Funktionen mit $f(a) = f(u_0) = 0$ sind und für die unbekannte Funktion $F(v)$ noch

$$F(v) = 0 \quad \text{für} \quad 0 \leq v \leq (u_0 - a)$$

gesetzt werden darf, wird näherungsweise gelöst, indem man $f(v)$ einem Ausdruck der folgenden vier Formen: $Ae^{\alpha v} + Be^{\beta v}$ oder $A(v - a)^{\lambda}(u_0 - v)^{\mu}$ oder

$$a_0 + a_1 \cos \varrho + b_1 \sin \varrho + a_2 \cos 2\varrho + b_2 \sin 2\varrho$$

mit $\varrho = 2\pi(v - a)/(u_0 - a)$ oder $e^{kv}(A \sin \varrho + B \sin 3\varrho)$ anpaßt durch geeignete Wahl von $A, B, \alpha, \beta, \lambda, \mu, a_i, b_i, k$. Setzt man für $f(v)$ einen der angegebenen Ausdrücke ein, so ergibt sich eine Integralgleichung, aus der man $F(v)$ in den beiden ersten Fällen durch Lösung einer Differenzgleichung, in den beiden letzten Fällen durch zusätzliche Lösung einer Differentialgleichung bestimmen kann. Die Differenzgleichung kann schrittweise über Intervalle der Länge $(u_0 - a)$ ausgehend von $F(v) = 0$ für $v \leq (u_0 - a)$ summiert werden. Die Integralgleichung, bei der an Stelle v als untere Grenze 0 steht, kann ähnlich behandelt werden. *L. Collatz (Karlsruhe).*

Oguiewetzki, I. E.: Die Verallgemeinerung des schiefsymmetrischen Dualitätsgesetzes auf den Hilbertschen Raum. Rend. Circ. mat. Palermo **59**, 228—230 (1935).

This note states the following duality theorem effective in ordinary Hilbert space: If for a motion in Hilbert space the equations

$$O_i(P_1 \dots P_n, \dots x_1 \dots x_n, \dots y_1 \dots y_n \dots) = 0 \quad (1)$$

are satisfied, then the equations

$$O_i(\bar{P}_1 \dots \bar{P}_n, \dots -y_1, \dots, -y_n, \dots -x_1, \dots -x_n, \dots) = 0 \quad (2)$$

also hold. $P_1 \dots P_n \dots$ are characteristics of motion, i.e. vectors, parameters, functions, — even, if they remain unchanged when the direction of motion is reversed, odd, if they depend upon an indicatrix, whose class is determined by the class of the indicatrix of the space. The dash in (2) indicates that the indicatrices of the odd characteristics in equation (2) differ from those of (1). $x_1, \dots x_n, \dots$ are coordinates in the given space, $y_1, \dots y_n, \dots$ in the transformed space. O_i are operations on characteristics and coordinates which determine a motion, or an invariant relative to a motion. The theorem is an extension of a similar result in n -dimensional space previously stated [Rend. Circ. mat. Palermo **51**, 315—320 (1927)]. It is used to deduce the well known result that if a_{ij} is a complete orthogonal matrix in the sense $\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} a_{jk} = \delta_{ij}$, then it is also orthogonal in the sense $\sum_{k=1}^{\infty} a_{ki} a_{kj} = \delta_{ij}$, the equations O_i being: $y_i = \sum_j a_{ij} x_j$ and $\sum_i y_i^2 = \sum_i x_i^2$. *Hildebrandt (Ann Arbor).*

Vulieh, B.: Sur les espaces métriques d'un certain type. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **4**, 311—314 (1935).

Ein linearer Raum X , in welchem jedem Komplex $K = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ von endlich vielen Elementen $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ eine nichtnegative, gewissen Axiomen genügende Zahl, seine Norm $\|x_1, x_2, \dots, x_n\|$ zugeordnet ist, wird K -normiert ge-

nannt. Dann ist X auch im Sinne von Banach normiert. Der Begriff einer K -konvergenten Folge, einer K -stetigen Funktionaloperation wird nun eingeführt und die Bedingung für die K -Stetigkeit einer linearen Funktionaloperation angegeben. Zuletzt wird ein Satz über Zeilen-Kolonnen- und Kolonnen-Zeilen-mäßige Konvergenz von Doppelfolgen der Funktionen $x_{(b)}^i(t)$ aus $L^{(p)}$ angekündigt. *Schauder* (Lwów).

Maeda, Fumitomo: Space of differential set functions. *J. Sci. Hiroshima Univ. A* **6**, 19—45 (1936).

This paper is an extension of previous papers of the author (see this Zbl. **7**, 117 and **11**, 309—310). The extension is effected first by replacing the set of Borel measurable sets in a separable metric space, by a multiplicative set \mathfrak{M} of sets of an abstract space Ω , \mathfrak{M} being multiplicative if E_1 and E_2 are of \mathfrak{M} , so is $E_1 \cdot E_2$. It is assumed that Ω belongs to \mathfrak{M} , and apparently that there exist decompositions \mathfrak{D} of Ω into a finite or infinite number of disjoint sets of \mathfrak{M} . Then an integral definition of the Moore-Kolmogoroff type [*Math. Ann.* **103**, 654—682 (1930)] is used, limit being in the sense of successive decompositions relative to \mathfrak{M} . Finally the Radon-Stieltjes integral is replaced by one of the Radon-Hellinger type: $\beta(E)$ being a positive absolutely additive set function on \mathfrak{M} (a differential set function) then $\xi(E)$, absolutely additive on \mathfrak{M} is of class \mathfrak{Q}_β^2 if $\xi(E) = 0$ when $\beta(E) = 0$, and $\sum_n |\xi(E_n)|^2 / \beta(E_n)$ is bounded for all decompositions $\mathfrak{D} = \sum_n E_n$ of Ω relative to \mathfrak{M} , the integral $\int_\Omega |\xi(dE)|^2 / \beta(dE)$ being

either the least upper bound of such sums or a limit in the \mathfrak{D} sense. The paper transfers the results of previous papers to this situation and closes with an application to quantum mechanics. The author asserts in the introduction that the situation treated includes the possibility that $\beta(\Omega)$ may be infinity. It seems to referee that the absolute additivity of β on \mathfrak{M} , and the inclusion of Ω in \mathfrak{M} precludes this possibility.

Hildebrandt (Ann Arbor).

Funktionentheorie:

Cioraneseo, Nicolas: Un algorithme pour le développement d'une fonction analytique de fonction analytique. *Bull. Sci. math.*, II. s. **60**, 12—32 u. 42—64 (1936).

L'auteur commence par définir les éléments de l'algorithme qu'il se propose d'établir: 1° la „trace“ d'une fonction analytique $f(z) = \sum_n a_n z^n$ relativement à une suite

numérique: $\{\alpha_k\}$ — Cette trace est ce que l'on obtient en remplaçant dans $f(z)$, z^n par α_n , soit, lorsqu'elle est convergente, la somme de la série $\sum_k a_k \alpha_k$; 2° les „polynômes

attachés“ à une fonction $f(z)$ suivant une „fonction développante“ Φ : ce sont les coefficients de z^n dans la développement suivant les puissances de z de la fonction $\Phi[x f(z)]$. Soient alors F et φ deux fonctions analytiques:

$$F[\varphi(z)] = F[a_0 + f(z)] = \sum_n \frac{F^{(n)}(a_0)}{n!} [f(z)]^n$$

n'est autre que la trace relativement à la suite $\{F^{(n)}(a_0)\}$ de $e^{x f(z)}$ considérée comme fonction de x . Si donc, on développe $F[\varphi(z)]$ suivant les puissances de z , le coefficient de z^n sera la trace, relativement à la même suite, du polynôme $X_n(x)$ attaché à $f(z)$ avec la fonction exponentielle comme fonction développante. Cette forme des coefficients du développement de $F[\varphi(z)]$ présente l'avantage de se prêter aisément à un calcul de majorantes. Ainsi l'auteur démontre-t-il que si \bar{F} et \bar{f} majorent respectivement F et f , $F[f(z)]$ est majoré par $\bar{F}[\bar{f}(z)]$ — En appliquant ceci à des familles de fonctions de majorantes connues, l'auteur retrouve et élargit des théorèmes de limitation du rayon de convergence de $F[\varphi(z)]$. — Les derniers chapitres sont consacrés — en appliquant toujours le même principe — au développement de l'inverse d'une fonction, au développement en série de Laurent d'une fonction entière de fonction holomorphe dans une couronne, au développement d'une fonction en série de polynômes.

E. Blanc (St. Mandé).

Priwaloff, I.: Sur la généralisation d'une formule de Jensen. I et II. Bull. Acad. Sci. URSS, VII. s. Nr 6/7, 837—846 u. 848—855 u. franz. Zusammenfassung 846—847 u. 855—856 (1935) [Russisch].

In Part I the author gives an extension of the Jensen-Nevanlinna formula and of the main results of the theory of the Nevanlinna characteristic function $T(r)$ to the case of any subharmonic function (in the plane). The whole discussion is based on F. Riesz' representation of a subharmonic function as a sum of a harmonic function and of a logarithmic potential. The theory of Nevanlinna appears as a special case when the subharmonic function in question reduces to $|f(z)|$ where $f(z)$ is meromorphic. The reviewer finds difficulties in following author's arguments in some places if no restrictions are imposed on the subharmonic function $u(z)$ in question.

Thus if $u(z) = -\sum_1^{\infty} \mu_n \log |1/(z - \zeta_n)|$ then in general $u(z)$ does not tend to a finite limit as $z \rightarrow 0$, contrary to a statement on p. 837, where $\mu(0)$ in the present case should be replaced by 0. It suffices to take $\mu_n = n^{-1}(\log n)^{-2}$, $\zeta_n = n^{-1}$. In Part II the author extends his theory to the case of space of any number of dimensions.

J. D. Tamarkin (Providence, R. I.).

Cartwright, Mary L.: On certain integral functions of order one. Quart. J. Math., Oxford Ser. 7, 46—55 (1936).

Using an interpolation formula due to Tschakaloff [Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. 43, 11—13 (1934)] the author proves the following results. Let $f(z)$ be an entire function such that $\lim_{r \rightarrow \infty} \log M(r)/r = k < \pi$, and $f(\pm n) < A$, $n = 1, 2, 3, \dots$

Then $|f(x)| < K(k)A$ for all real x . If, in addition, $f(n) \rightarrow l$, then also $f(x) \rightarrow l$. The author shows that these results (in somewhat less precise form) can be extended to functions regular in an angle.

J. D. Tamarkin (Providence, R. I.).

Bernstein, V.: Stato attuale della teoria delle trascendenti intere. Rend. Semin. mat. fis. Milano 8, 105—126 (1934).

Reproduction d'une conférence sur les développements de la théorie des fonctions entières depuis ses débuts jusqu'aux travaux de l'auteur sur les relations entre la croissance, la distribution des valeurs et les singularités des séries de Taylor associées dans la méthode de sommation de Borel et ses généralisations. Après avoir parlé des premiers travaux d'Hadarnard et Borel, du théorème de Picard et de la démonstration de Bloch, l'auteur insiste surtout sur la théorie de Phragmén et Lindelöf, la théorie de Nevanlinna, le théorème de Denjoy-Carleman-Ahlfors sur le nombre des valeurs asymptotiques des fonctions d'ordre fini, puis passe aux recherches sur les directions de Julia et de Borel. Il faut regretter que l'ampleur du sujet ait obligé l'auteur à se restreindre, que le nom de Poincaré ne soit pas prononcé, ni celui de Laguerre et de certains de ses successeurs comme Pólya (fonctions à zéros réels), ni ceux des chercheurs qui ont élucidé les questions relatives au genre, aux fonctions inverses, aux fonctions d'ordre infini (Wiman, Boutroux, Denjoy, Blumenthal, Sire, Iversen, Gross), ni celui d'Ostrowski (directions de Julia). Le travail de Wiman sur le comportement de la fonction dans le voisinage de son maximum, qui a ouvert la voie à tant de travaux, aurait dû aussi être signalé.

G. Valiron (Paris).

Blanc, Charles: Classification des singularités des fonctions inverses des fonctions méromorphes. C. R. Acad. Sci., Paris 202, 459—461 (1936).

Der Verf. versucht die Iversensche Einteilung der transzendenten Singularitäten weiterzuführen und bedient sich dabei eines verallgemeinerten topologischen Baumes. Das genaue Referat möge bis zur Erscheinung der in Aussicht gestellten detaillierten Darstellung anstehen, die vermutlich einige Unklarheiten in der Formulierung beseitigen wird.

Ahlfors (Cambridge, Mass.).

Blanc, Charles: *Le type des surfaces de Riemann simplement connexes.* C. R. Acad. Sci., Paris **202**, 623—625 (1936).

Unter Anwendung des Blochschen Kontinuitätsprinzips ist es leicht, aus einigen Kriterien zur Bestimmung des Typus einer Riemannschen Fläche vermutungsweise bedeutend allgemeinere Sätze herzuleiten. Der genaue Beweis stößt jedoch meistens auf erhebliche Schwierigkeiten. Der Verf. nennt einige Fälle, in welchen der Beweis ihm gelungen ist; der erste Fall ist schon in Kobayashis Ergebnis enthalten (dies. Zbl. **11**, 169). Ferner wird das Typenproblem der durch Identifikation von Randpunkten erhaltenen Riemannschen Flächen diskutiert. Es geht aus der Note nicht hervor, ob die diesbezüglichen Resultate nur einzelne Fälle umfassen oder ob sie zu allgemeinen Kriterien führen. Die in derselben Richtung gehenden Untersuchungen von Myrberg (dies. Zbl. **11**, 313 u. **13**, 122) werden nicht erwähnt. *Ahlfors* (Cambridge, Mass.).

Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik, Versicherungsmathematik:

● **Tornier, E.:** *Wahrscheinlichkeitsrechnung und allgemeine Integrationstheorie.* Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner 1936. IV, 160 S.

Von den 158 Seiten des Buches sind nur die letzten 58 der Wahrscheinlichkeitstheorie gewidmet, während die 100 ersten eine Darstellung der Theorie der abstrakten Riemannschen und Lebesgueschen Integrale bringen. Dem Aufbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung liegt der Begriff der „Versuchsvorschrift“ zugrunde, der nicht definiert, sondern nur an Beispielen erläutert wird; es handelt sich um eine unendliche Versuchsfolge, in welcher jeder Versuch eine höchstens abzählbare Menge von möglichen Ergebnissen zuläßt; jede Folge von solchen Ergebnissen ist eine „logisch mögliche Realisierung“ der Versuchsvorschrift. Gewissen Teilmengen der Menge aller Realisierungen werden Bewertungen zugeschrieben, die Wahrscheinlichkeiten heißen. Eine Teilmenge, die durch das Festsetzen der Ergebnisse der n ersten Versuche bestimmt ist, heißt eine Grundmenge; alle Grundmengen sollen Wahrscheinlichkeiten besitzen; darüber hinaus wird durch ein Axiomensystem festgelegt, welchen Teilmengen Wahrscheinlichkeiten zugeschrieben sein sollen und wie diese Wahrscheinlichkeiten miteinander zu verknüpfen sind. Das ausdrücklich betonte Bestreben, nur mit solchen Modellen zu arbeiten, die eine „Häufigkeitsdeutung“ zulassen, zwingt den Verf. zu einer sehr beträchtlichen Einschränkung der zulässigen Wahrscheinlichkeitsfelder, indem nämlich der ganzen Theorie der Jordansche (nicht der Lebesguesche) Maßbegriff zugrunde gelegt werden muß (wie bedeutend diese Einschränkung ist, ersieht man z. B. schon daraus, daß man beim unbeschränkten Würfeln für das unendlich ofte Ausfallen der Eins nach diesen Rechenregeln keine bestimmte Wahrscheinlichkeit erhält). Der wahrscheinlichkeitstheoretische Teil des Buches enthält nur die elementaren Grundtatsachen: die Additions- und Multiplikationssätze, die elementare Bayes'sche Regel, das Gesetz der großen Zahlen und die Grenzwertsätze von Laplace-Ljapounoff und Poisson in ihrer einfachsten Fassung. — Verf. stellt sich die Aufgabe, „die Verflächung lebendiger Grundanschauungen zu lebensleerem, mathematischem Formalismus zu vermeiden, wie sie etwa eine nur durch Analogie gewisser Rechenregeln begründete Identifizierung von Wahrscheinlichkeitsrechnung und Lebesguescher Maßtheorie zur Folge hat“. Es ist nicht einzusehen, aus welchen Gründen zu diesem Ziel ein Weg eingeschlagen wird, der unter wesentlich größerem Aufwand an mathematischem Formalismus zu einer ebensolchen (übrigens auf S. 105 explizit ausgesprochenen) Identifizierung mit einer eingeschränkteren und dementsprechend wesentlich weniger Aussichten eröffnenden Maßtheorie führt. *A. Khintchine.*

● **Pomey, J.-B.:** *Calcul des probabilités.* Paris: Gauthier-Villars 1936. 87 pag. Frs. 25.—.

Nachdem auf 23 Seiten eine Einführung in elementare Aufgaben der Wahrscheinlichkeitsrechnung gegeben ist, wird der Bayessche Problemkreis ausführlich dargestellt. Es finden sich Anwendungen auf Telephonanschlüsse, die Gastheorie und die Brownsche Bewegung. *Rehbock* (Bonn).

Craig, Cecil C.: *On the frequency function of xy .* Ann. math. Statist. **7**, 1—15 (1936).

Eingehende Untersuchung der Verteilungsfunktion eines Produktes von zwei normal verteilten, im allgemeinen gegenseitig abhängenden zufälligen Variablen. Für spezielle Werte der Parameter werden Tabellen angegeben. *A. Khintchine* (Saratow).

Craig, Cecil C.: *A new exposition and chart for the Pearson system of frequency curves.* Ann. math. Statist. **7**, 16—28 (1936).

Die Abänderung gegenüber der üblichen Darlegung hat die Wahl anderer Parameter zur Grundlage. *A. Khintchine* (Saratow).

Mortara, G.: Misure ed indici delle disuguaglianze statistiche. Rend. Semin. mat. fis. Milano 8, 83—103 (1934).

The mean difference of n observations (see e.g. this Zbl. 11, 315, Wold) and the mean deviation are compared from a philosophical point of view. *Herman Wold.*

Wold, Herman: Sur les surfaces de mortalité. C. R. Acad. Sci., Paris 202, 1132 bis 1133 (1936).

Une famille de courbes $\mu = f(x, a_1, \dots, a_n)$ à n paramètres étant donnée, on peut substituer aux a_k des fonctions empiriques du temps t de sorte que l'équation

$$\mu(x, t) = f(x, a_1, \dots, a_n)$$

soit satisfaite approximativement, $\mu(x, t)$ étant l'intensité de mortalité calculée pour l'âge x et le temps t . On procède de la même manière pour une autre famille $\varphi(x, \alpha_1, \dots, \alpha_r)$ de courbes et l'intensité $\eta(x, \tau)$ de mortalité calculée pour l'âge x et l'instant de naissance τ ; d'ailleurs on a identiquement $\mu(x, t) = \eta(x, t - x)$. L'auteur pose le problème de trouver toutes les surfaces de mortalité $\mu(x, t)$ correspondant au sens indiqué à deux familles données de fonctions f, φ . Il envisage une méthode de solution fondée sur les équations à dérivées partielles qu'on peut réduire, dans certains cas importants, à des équations ordinaires. *A. Khintchine (Saratow).*

Koeppler, H.: Das Hattendorffsche Risiko kontinuierlicher Versicherungen mit mehreren Auflösungsmöglichkeiten. Aktuär. Vědy 5, 161—181 (1936).

Im ersten Teile der Arbeit dehnt der Verf. die Beweise von Bertelsen auf die von ihm im Versich.-Arch. Nr 4, 11 des 4. Jhrgs. behandelten Versicherungsformen aus. Im zweiten Teile wird der Hattendorffsche Satz mittels des Tschebyscheffschen Theorems hergeleitet, indem der Ausweg aus den Schwierigkeiten, die sich für die Betrachtungen für ein Zeitdifferential zeigen, in einer Kollektivberechnung mit Anwendung der dem ersten Beweise von Bertelsen entsprechenden analytischen Darstellung gefunden wird. *Janko (Praha).*

Messina, I.: Sulle riserve dell'assicurazione d'invalidità-vecchiaia a premio medio generale. Giorn. Ist. Ital. Attuari 7, 197—205 (1936).

Numerische und graphische Methoden.

Emde, Fritz: Fortlaufende Rechnungen auf der Rechenmaschine. Z. Instrumentenkde 56, 181—188 (1936).

Verf. gibt einen Überblick über die zusammengesetzten Rechnungen, die auf einer Rechenmaschine fortlaufend durchgeführt werden können, d. h. ohne Zwischenergebnisse abzulesen. Wesentlich ist, daß bei jeder Rechenmaschine Multiplikation und Division auf zwei verschiedene Arten ausführbar sind. Durch passende Kombination dieser Arten kann man fortlaufend beliebig oft abwechselnd multiplizieren und dividieren. Das Vorhandensein einer Rückwurfeinrichtung und/oder eines Begleitwerks (Speicherwerk in Form eines abschaltbaren zweiten Empfangswerks) bietet weitere Möglichkeiten. Insbesondere wird auf die Bedeutung dieser Einrichtungen für Untertafelungsrechnungen eingegangen (fortlaufende Bildung und Summation der ersten und zweiten Differenzen einer Zahlentafel). *S. Gradstein (Eindhoven).*

Ott, L.-A.: Nouveaux planimètres et intégrimètres. Extrait du: Génie Civil, Mars-Fasc., 12 pag. (1936).

Übersetzung einer Arbeit aus Meßtechn. 12 (vgl. dies. Zbl. 13, 276).

Reuter, F.: Ein Hilfsapparat zur harmonischen Analyse. Z. Geophys. 12, 29 bis 32 (1936).

Es handelt sich um einen Apparat zur Verwandlung von rechtwinkligen Koordinaten x, y in Polarkoordinaten r, φ . Zur Einstellung bzw. Ablesung von x, r, φ dient ein Maßstab, der um einen festen Punkt drehbar ist und durch ihn gleiten kann; y wird auf einem in x -Richtung verschiebbaren Maßstab eingestellt. *Theodor Zech.*

Villemarqué, E. de la: Sur le calcul de transformations linéaires, rencontrées en astronomie, par l'emploi combiné de la machine et du procédé des bandes mobiles. C. R. Acad. Sci., Paris **202**, 1018—1019 (1936).

Kurzer Hinweis auf die nomographische Behandlungsmöglichkeit linearer Transformationen. *Rehbock* (Bonn).

Vetulani, K. F.: Über Anwendung einer geometrischen Darstellung auf Biometrie und Statistik. (2. congr. des math. roum., Turnu-Severin, 5.—9. V. 1932.) Mathematica, Cluj **9**, 284—293 (1935).

Für die „anatolische Pferdezeit“ sollen die Individuen X mit 2 ausgewählten Individuen A und B verglichen werden. X wird durch k Messungen, also durch k Koordinaten x_k charakterisiert und dann durch einen Punkt einer Bildebene repräsentiert, der von 2 festen Punkten A und B die Entfernungen $\sqrt{\sum (a_k - x_k)^2}$ und $\sqrt{\sum (b_k - x_k)^2}$ hat. So wird Ordnung in die Tiere gebracht! *Rehbock* (Bonn).

Deming, W. Edwards: On the significance of slopes and other parameters estimated by least squares. Physic. Rev., II. s. **49**, 243—247 (1936).

This paper is an interpretative discussion of three different known tests for the significance of the difference from a given value of a parameter in an empirical formula fitted to data by least squares, it being assumed that estimates of the parameter so obtained are distributed normally about the true value. *C. C. Craig* (Ann Arbor).

Krawtchouk, M.: Sur l'évaluation des erreurs dans le problème linéaire de la méthode des moindres carrés. Bull. Sci. Univ. Kiev, Rec. math. **1**, 26—41 u. franz. Zusammenfassung 41 (1935) [Ukrainisch].

Behandelt die Ausgleichung von Systemen linearer Gleichungen nach der Methode der kleinsten Quadrate. Besonderer Wert wird auf die Herleitung der Fehlerformeln gelegt. Keine neuen Ergebnisse. *Theodor Zech* (Darmstadt).

Berger, Alfred: Zur Theorie der mechanischen Ausgleichung. Mh. Math. Phys. **43**, 51—65 (1936).

Verlangt man von einer Glättungsformel $v_x = \sum_{k=-n}^{k=n} \alpha_k u_{x+k}$, daß sie das Gesetz $a + bq^x$ bei gegebenem q ungeändert läßt und daß sie im Sinne von Landré mit maximaler Glättungskraft wirkt, so gelangt man bei $q = 1,09$ zu der Glättungsformel

$$\alpha_0 = 0,14970, \alpha_1 = 0,14534, \alpha_2 = 0,13223, \alpha_3 = 0,11027, \alpha_4 = 0,07929, \alpha_5 = 0,03907, \\ \alpha_6 = -0,01069, \alpha_7 = -0,07036;$$

bei $q = 1,10$ zu der Formel

$$\alpha_0 = 0,14940, \alpha_1 = 0,14506, \alpha_2 = 0,13205, \alpha_3 = 0,11023, \alpha_4 = 0,07941, \alpha_5 = 0,03931, \\ \alpha_6 = -0,01045, \alpha_7 = -0,07031. \quad F. Knoll \text{ (Wien).}$$

Geometrie.

Kubota, Tadahiko: Ein Satz über Zykelreihen. Mh. Math. Phys. **43**, 66—68 (1936).

Der Verf. beweist mittels eines Satzes von E. Müller (Vorlesungen üb. darst. Geometrie, Bd. 2, Die Zyklographie, herausgeg. von J. Krames, 1929, S. 188, Satz 4) einen bereits früher (Bd. 15, Science Reports I, Tôhoku Imp. Univ.) mitgeteilten Satz über Zykelreihen. Nach diesem lassen sich aus n Zykeln ($n \geq 4$), die einen Speer berühren, falls n gerade ist, n Zykeln ableiten, die einen Speer berühren, und falls n ungerade ist, n Speere gewinnen, die einen Zykel berühren. *E. Kruppa* (Wien).

Edge, W. L.: Some special nets of quadrics in four-dimensional space. Acta math. **66**, 253—332 (1936).

The author applies the results obtained in a previous paper [Acta math. **64**, 185 (1935); this Zbl. **11**, 415] for the general net of quadrics in S_4 to develop properties of some special nets. In particular he is concerned with the correspondence between the Jacobian curve ϑ of the net and the non-singular quintic curve ζ which, when the quadrics of the net are mapped by the points of a plane, represents the cones

of the net. In general ϑ possesses 20 trisecant lines. If two of these pass through the same point of ϑ then two others meet in a second point of ϑ . If a 6-secant plane of ϑ meets ϑ in the vertices of a complete quadrilateral then four trisecants of ϑ are concurrent, and ζ has an inscribed quadrilateral whose sides meet the curve again in eight points lying on a conic which touches ζ . If ϑ is circumscribed to a hexahedron then ζ is circumscribed to a hexagram. — The author studies at length the case in which ϑ is circumscribed to an infinity of hexahedra; ζ is then circumscribed to an infinity of hexagrams whose sides all touch the same conic γ . The curve ϑ in this case possesses a scroll of trisecants. The faces of the hexahedra inscribed in ϑ generate a developable of class four, and the locus of poles of these faces, with regard to the quadrics of the net, is a rational quartic symmetroid on which ϑ is a double curve. The equations of the quadrics of the net can be expressed simultaneously as linear combinations of the squares of the equations of the six faces of any one of the hexahedra. There are 60 trisecants of ϑ which are cut in involution by the quadrics of the net, these fall into ten cospatial sets of six, each set consisting of the edges of a tetrahedron. Each of the ten hyperplanes so determined belongs to a hexagram inscribed in ϑ . The quadrics of the net touching one of these hyperplanes correspond, in the plane of ζ , to points of a contact quartic of ζ which degenerates into an in-and-circumscribed quadrilateral. The quadrics of the net which correspond to the points of the conic γ envelop a quartic hypersurface having the base-curve of the net as double curve, whose section by any one of these ten hyperplanes is a desmic quartic surface. — Another special net considered by the author is the net of polar quadrics of points of a plane π with regard to a Segre cubic hypersurface. The curve ϑ so arising is in general circumscribed to a single hexahedron but π can be chosen so that there are an infinite number of inscribed hexahedra. The curve ζ possesses an inscribed hexagram, with the peculiarity that the fifteen tangents to ζ at the vertices of the hexagram meet by threes in fifteen points, all lying on ζ . The paper concludes by determining the freedom of the curve ϑ in each of the cases considered. *Todd*.

Radon, Johann: Annäherung konvexer Körper durch analytisch begrenzte. *Mh. Math. Phys.* **43**, 340—344 (1936).

Es bezeichne u einen variablen, w einen festen Punkt des n -dimensionalen Raumes. Sind dann $H(u)$ und $K(u)$ Stützfunktionen konvexer Körper \mathfrak{S} bzw. \mathfrak{R} , so ist $H(u - wK(u)) + H(w)K(u)$ wiederum Stützfunktion, und zwar für den konvexen Körper, der von den Punkten $x + (H(w) - \sum wx)y$ durchlaufen wird, wenn x und y unabhängig \mathfrak{S} bzw. \mathfrak{R} durchlaufen. Auf Grund dieses auch für sich bemerkenswerten Hilfssatzes beweist Verf. den Satz von Minkowski, daß jeder konvexe Körper durch analytisch begrenzte approximiert werden kann, im Gegensatz zu Minkowski, ohne die Approximierbarkeit durch konvexe Polyeder heranzuziehen, in folgender Weise: Es sei $f(w, \lambda)$ eine nichtnegative, im ganzen w -Raum und für alle großen λ definierte Funktion, für welche die über den ganzen Raum erstreckten Integrale

$$\int f(w, \lambda) dW = 1, \quad \int \sqrt{\sum w^2} f(w, \lambda) dW = \delta(\lambda)$$

existieren und $\delta(\lambda) \rightarrow 0$ für $\lambda \rightarrow \infty$ gilt. Dann konvergiert die Funktion

$$H(u, \lambda) = \int \{H(u - w\sqrt{\sum u^2}) + H(w)\sqrt{\sum u^2}\} f(w, \lambda) dW,$$

die nach dem Hilfssatz für jedes λ eine Stützfunktion ist, für $\lambda \rightarrow \infty$ gleichmäßig gegen $H(u)$. Für geeignete f , z. B. $\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-\lambda^2 \sum w^2}$, werden die $H(u, \lambda)$ analytisch.

W. Fenchel (Kopenhagen).

Abramescu, N.: Propriétés géométriques du mouvement d'une figure plane variable qui reste semblable à elle même, quand trois droites de la figure passent par trois points fixes, ou quand trois points décrivent trois droites fixes. *Gaz. mat.* **41**, 409—414 (1936) (Rumänisch).

L'A. montre qu'il existe un centre I de mouvement fixe, le mouvement se réduit

à une rotation autour de I et à une amplification. Dans le premier cas, tout point de la figure décrit un cercle passant par I , et toute droite passe par un point fixe. Dans le deuxième cas, tout point décrit une droite fixe et toute droite enveloppe une parabole avec le foyer I . On peut passer d'un cas à l'autre, par une transformation par polaires réciproques, par rapport à un cercle de centre I . *Abramescu (Cluj)*.

Differentialgeometrie:

Engel, Friedrich: Die geodätische Abbildung der Flächen. *Mh. Math. Phys.* 43, 44—50 (1936).

Die Grundgleichungen (1) dieser Arbeit können auf diese Weise erhalten werden (Ref.): Aus der bekannten n.u.h. Bedingung für die geodätische Abbildung von V_2 und \hat{V}_2 in R_3 (also von zwei Flächen in R_3)

folgt sofort
$$\left\{ \begin{matrix} \nu \\ \lambda \mu \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \hat{\nu} \\ \lambda \mu \end{matrix} \right\} + p_\lambda \delta_\mu^\nu + p_\mu \delta_\lambda^\nu, \quad (p_\lambda \text{ Gradient})$$

$$2 \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 1 \ 1 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2 \ 2 \end{matrix} \right\} = 0, \quad 2 \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 1 \ 2 \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 1 \ 1 \end{matrix} \right\} = \frac{-\Omega_u}{\Omega}, \quad \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 2 \ 2 \end{matrix} \right\} - 2 \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 1 \ 2 \end{matrix} \right\} = \frac{\Omega_v}{\Omega}, \quad (1)$$

wenn das Bogenelement von \hat{V}_2 die Form $2\Omega du dv$ hat. Die Lösung dieses Systems wird hier angegeben, und zwar in dem Falle, wo $EG \neq 0$ (E, F, G sind Komponenten des metrischen Fundamentaltensors von V_2), und auch in dem Falle, wo $E \neq 0, G = 0$. Im ersten Falle bekommt man somit in eleganter Weise die Übereinstimmung mit dem Dinischen Resultat, der zweite Fall führt auf die Liesche Form des Bogenelementes. Diese Resultate werden dann insbesondere auf die geodätische Abbildung zweier unendlich benachbarten Flächen angewandt, wobei der Ausgangspunkt die Gleichungen (1) und $E = \delta E, F = \Omega + \delta F, G = \delta G$ bilden. Auch hier wird die Lösung bestimmt. Das Resultat wird dann zur Lösung der Aufgabe benützt, um die Flächen ausfindig zu machen, deren geodätische Linien eine infinitesimale Punkttransformation gestatten. Die Arbeit wird mit der Diskussion des Zusammenhanges mit älteren Arbeiten von Lie, Darboux und Jacobi beendet. *Hlavatý (Praha)*.

Mentré, Paul: Étude géométrique des lignes asymptotiques des surfaces gauches. *Mém. Soc. Roy. Sci. Liège*, III. s. 20, fasc. 1, 1—28 (1935).

Verf. bestimmt auf geometrischem Wege zahlreiche Eigenschaften der (nicht-geradlinigen) Asymptotenlinien (A.L.) einer Regelfläche. Nach der Untersuchung singulärer Erzeugender wendet sich Verf. zu den A.L. und zeigt durch einen auf die Lie- F_2 führenden Grenzübergang, daß 4 A.L. die Erzeugenden in einem konstanten Doppelverhältnis schneiden. — Besitzt die Regelfläche eine Leitgerade, so lassen sich alle A.L. aus einer einzigen ohne Integration bestimmen. Dies wird durch geeignete Projektionen der Regelfläche bewiesen. — Besitzt die Regelfläche 2 Leitgeraden, so gestattet sie eine eingliedrige Gruppe projektiver Transformationen, die die A.L. untereinander vertauschen. Dadurch können die A.L. ohne Integration bestimmt werden. Der Fall des Zusammenfallens der beiden Leitgeraden in eine doppelt zählende wird ausführlich behandelt. — Den Schluß bilden die Regelflächen, deren Erzeugende einem linearen Komplex angehören. Hier findet man, wie schon Lie gezeigt hat, 2 A.L. ohne Integration. Gehört die Regelfläche der Schnittkongruenz eines Komplexbüschels an, so besitzt sie 2 Leitgeraden, und man erhält eine Verbindung zu den vorangegangenen Ergebnissen. *W. Haack (Berlin-Charlottenburg)*.

Süß, Wilhelm: Projektivverwandte der Drehflächen und ihre Segre-Kurven. *Tôhoku Math. J.* 41, 308—310 (1936).

L'auteur examine les transformées projectives des surfaces affines de rotation. Il donne une démonstration nouvelle et quelques modifications du théorème connu de la géométrie affine qui s'étend lui-même en géométrie projective: la surface possède la propriété citée si les lignes de Segre d'une famille sont coniques (les lignes de raccordement des cônes circonstris), planes dont les plans appartiennent à un faisceau.

S. Finikoff (Moscou).

Su, Buchin: Some characteristic properties of projective minimal surfaces. Sci. Rep. Tôhoku Univ., I. s. 24, 595—600 (1936).

Soit K la conique qui touche les courbes flecnodales aux points homologues des deux réglées asymptotiques d'une surface S, Q — la quadrique qui passe par K et par le quadrilatère de M. Demoulin attaché au point considéré de S . Cela posé, S est projective-minimale si 1° les tangentes asymptotiques sont conjuguées par rapport à K ou 2° les plans qui passent par la première directrice de Wilczynski et par une tangente asymptotique sont conjugués par rapport à Q ou 3° les deux directrices coupent la quadrique de Lie et la quadrique Q aux points harmoniquement conjugués ou 4° les plans focaux de la congruence engendrée par la première directrice sont conjugués par rapport à Q . La dernière propriété appartient également aux surfaces isothermes-asymptotiques de M. Fubini. *S. Finikoff* (Moscou).

Su, Buchin: On the surfaces whose asymptotic curves belong to linear complexes. V. Sci. Rep. Tôhoku Univ., I. s. 24, 601—633 (1936).

En poursuivant l'étude de la surface S désignée au titre (ce Zbl. 11, 324; 12, 224) et dont les quadrilatères D (de M. Demoulin) sont situés sur une quadrique Q l'auteur considère deux familles de surfaces Σ, Σ' dont les quadrilatères D coïncident avec ceux de S . Les surfaces Σ, Σ' stratifient le couple de congruences engendrées par les droites $g = Q_1 Q_2, g' = Q_3 Q_4$ qui portent leurs points homologues. Si Q_i sont les points d'intersection avec Q , le quadrilatère $(Q_1 Q_2 Q_3 Q_4)$ est le quadrilatère dérivé du quadrilatère D de Σ, Σ' . Les nappes focales $(X_\varepsilon), (\mathcal{E}_\varepsilon)$ ($\varepsilon = \pm 1$) de $(g), (g')$ appartiennent à la classe de S et déterminent un quadruple conjugué que M. Pantazzi a examiné et dont les congruences font correspondre sur les nappes focales les lignes de Darboux aux lignes de Segre. Les deux couples des congruences du quadruple $(X_1 X_{-1}), (\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_{-1})$ et $(X_1 \mathcal{E}_{-1}), (X_{-1} \mathcal{E}_1)$ ont comme surfaces stratifiantes Σ, Σ' et A, A' . Le quadrilatère D commun de A, A' est le quadrilatère $(Q_1 Q_2 Q_3 Q_4)$; les rayons du second couple déterminent sur Q les quadrilatères D de Σ, Σ' . Les diagonales $(X_1 \mathcal{E}_1), (X_{-1} \mathcal{E}_{-1})$ du quadruple coïncident avec les directions de Wilczynski des nappes focales $(X_\varepsilon), (\mathcal{E}_\varepsilon)$. Elles déterminent sur Q des quadrilatères associées de $(Q_1 Q_2 Q_3 Q_4)$. Plusieurs fautes d'impression. *S. Finikoff* (Moscou).

Su, Buchin: On the surfaces whose asymptotic curves belong to linear complexes. VI. Sci. Rep. Tôhoku Univ., I. s. 24, 634—642 (1936).

En poursuivant l'étude (voir le réféarat préc.) l'auteur démontre: deux surfaces qui correspondent par leurs asymptotiques et dont les quadriques associées (ce Zbl. 11, 324) aux points homologues coïncident appartiennent à la classe désignée au titre. *S. Finikoff* (Moscou).

Pantazi, A.: Sur les couples de congruences stratifiables par familles de quadriques. (2. congr. des math. roum., Turnu-Severin, 5.—9. V. 1932.) Mathematica, Cluj 9, 223 bis 233 (1935).

Un couple de congruences K, K' est stratifiable s'il existe deux familles de surfaces $(S), (S')$ dont les plans tangents aux points situés sur un rayon de K (ou K') passent par le rayon homologue de $K' (K)$. L'auteur examine le cas où la famille (S) consiste en quadriques. Les surfaces S' sont des quadriques également et deux congruences K, K' se confondent avec une congruence linéaire E . Deux rayons correspondants de K, K' sont homologues, à l'intérieur de E , dans une correspondance algébrique $(2, 2)$. L'auteur emploie la méthode du repère mobile de M. Cartan et donne la solution explicitement. *S. Finikoff* (Moscou).

Demoulin, A.: Sur la courbure des congruences de sphères. C. R. Acad. Sci., Paris 202, 1234—1237 (1936).

Soit (S) la congruence de sphères et $d\varphi$ — l'angle de deux sphères S infiniment voisines. La courbure K de $d\varphi^2$ est la courbure de (S) . L'auteur donne 4 expressions de K . 1° $K = 1 + \frac{kR^2}{\cos^2 \theta} \left(1 - \frac{PF_1 \cdot PF_2}{P M^2} \right)$ où k est la courbure de la surface (O) lieu

des centres de S ; M, M_1 — les points caractéristiques de S ; F_1, F_2 et P — les foyers et le point d'intersection de MM_1 avec le plan tangent de (O) ; R — le rayon de S et $\theta = LOMM_1$. 2° L'expression de K contient les rayons de courbure géodésique en O de la ligne L ($R = \text{const}$) et T (la trajectoire orthogonale), le rayon R et ses dérivées par rapport à s_1, s_2 (les abscisses curvilignes de O sur L et T). 3° $K = 1 - \frac{1}{2} \left[\sec^2 \frac{\alpha}{2} + \sec^2 \frac{\beta}{2} \right] \sin^2 \gamma$ où γ est l'angle des lignes principales u, v sur (M) , α et β — l'angle des sphères de courbure normale de la ligne u sur (M) et de la ligne v sur (M_1) et vice-versa. 4° La quatrième expression de K introduit certaines sphères S_1, S_2 qui passent par un cercle C qui coupe orthogonalement S aux points M, M_1 et les sphères T_1, T_2 qui coupent orthogonalement C aux points d'intersection avec la caractéristique de S_1, u variant seul, ou avec la caractéristique de S_2, v variant seul.
S. Finikoff (Moscou).

Fabricius-Bjerre, Fr.: Schnittkurven einer Fläche im R^4 mit ihren Tangentialräumen.

Mat. Tidsskr. B 1936, 31—34 [Dänisch].

Die Gestalt der Schnittkurve einer (zweidimensionalen) Fläche im vierdimensionalen Raum mit einem ihrer Tangentialräume, d. h. einem R^3 , der die Tangentialebene der Fläche enthält, hängt davon ab, ob es sich um einen elliptischen, parabolischen oder hyperbolischen Flächenpunkt handelt, ferner aber auch davon, ob der Tangentialraum die Krümmungsellipse des Flächenpunktes nicht trifft, berührt oder schneidet. Es werden die verschiedenen Fälle durchdiskutiert und die gestaltlichen Möglichkeiten für die Schnittkurven angegeben. W. Fenchel (Kopenhagen).

Lense, Josef: Über vollisotrope Flächen. Mh. Math. Phys. 43, 177—186 (1936).

Zuerst wird die allgemeine vollisotrope Fläche in R_n als Integralfäche der Gleichung

$\sum_1^n (dx_i)^2 = 0$ gefunden. Im Anschluß an eine Arbeit von Pinl (dies. Zbl. 6, 78)

wird zu solch einer Fläche $x(u^I, u^{II})$ die Grundform $g_{\alpha\beta\gamma\delta} du^\alpha \dots du^\delta$ konstruiert, indem $g_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{\partial^2 x}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial u^\gamma \partial u^\delta}$ gesetzt wird. Insbesondere werden die Flächen mit den Grundformen

$$a du^4 \text{ resp. } a du^3 dv \text{ resp. } a du^4 + b dv^4 \quad (u \equiv u^I, v \equiv u^{II})$$

untersucht und die zwei ersten auch geometrisch charakterisiert. Hlavatý (Praha).

Noi, Salvatore di: Linea di stringimento di una superficie di geodetiche in uno spazio curvo. Boll. Un. Mat. Ital. 15, 83—86 (1936).

Das Verschwinden der geodätischen Krümmung der isogonalen Trajektorien einer Linie S längs dieser Linie auf einer Regelfläche in R_3 ist bekanntlich die charakteristische Bedingung dafür, daß S Striktionslinie ist. Da der Beweis dieses Satzes auch nur in der betrachteten Fläche verlaufen kann (ohne R_3 zu benutzen), ist ohne Rechnung ersichtlich, daß er für entsprechende V_2 in V_n gelten muß. Der Autor beweist ihn mittels der direkten italienischen Symbolik. Hlavatý (Praha).

Bortolotti, Enea: Trasporti non lineari: geometria di un sistema di equazioni alle derivate parziali del 2° ordine. I. Preliminari. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 23, 16—21 (1936).

Bortolotti, Enea: Trasporti non lineari: geometria di un sistema di equazioni alle derivate parziali del 2° ordine. II. Le proprietà intrinseche del sistema. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 23, 104—110 (1936).

In einer $X_n(x)$ sei eine $X_m(u)$ gegeben. Der Verf. sucht die Differentialinvarianten des Systems

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 x^i}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} &= H_{\alpha\beta}^i(x, u, p); \\ (h, i, j, k &= 1, \dots, n; \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta = \dot{1}, \dots, \dot{m}, \quad p = \frac{\partial x}{\partial u}); \quad H_{[\alpha\beta]}^i = 0, \end{aligned} \right\} \quad (1a)$$

in bezug auf die Transformationen

$$x^{i'} = x^{i'}(x^1, \dots, x^n), \quad u^{\alpha'} = u^{\alpha'}(u^1, \dots, u^{\dot{m}}). \quad (2)$$

In der ersten Note verweist der Verf. auf die schon existierenden Arbeiten in dieser Richtung (Żorawski, Ślebodziński, Douglas, Berwald, Cartan, Kosambi usw.). In der zweiten Note werden Konnexionskoeffizienten Γ_{jk}^i bzw. $G_{\beta\gamma}^\alpha$, der Konnexion in X_n bzw. in X_m folgendermaßen eingeführt

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{-1}{m(m+1)} \frac{\partial^2 H_{\alpha\beta}^i}{\partial h_\alpha^j \partial p_\beta^k}, \quad G_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{1}{n} \left(\frac{\partial H_{\beta\gamma}^\alpha}{\partial p_\alpha^i} + \Gamma_{ij}^\alpha (p_\beta^j \delta_\gamma^\alpha + p_\gamma^j \delta_\beta^\alpha) \right). \quad (3)$$

Mit Hilfe dieser Koeffizienten können verschiedene Arten von kovarianten Ableitungen konstruiert werden. Beispielsweise sollen hier folgende angeführt werden:

$$\begin{aligned} D_i A^j &= \frac{\partial A^j}{\partial x^i} - \frac{\partial A^j}{\partial p_\alpha^h} p_\alpha^k \Gamma_{ki}^h + \Gamma_{hi}^j A^h, & D_i A^\alpha &= \frac{\partial A^\alpha}{\partial x^i} - \frac{\partial A^\alpha}{\partial p_\beta^h} p_\beta^k \Gamma_{ki}^h, \\ D_\beta A^\alpha &= \frac{\partial A^\alpha}{\partial u^\beta} + \frac{\partial A^\alpha}{\partial p_\gamma^h} G_{\gamma\beta}^\delta p_\delta^h + G_{\gamma\beta}^\alpha A^\gamma, & D_\beta A^j &= \frac{\partial A^j}{\partial u^\beta} + \frac{\partial A^j}{\partial p_\gamma^h} p_\delta^h G_{\gamma\beta}^\delta. \end{aligned}$$

Die Differentialinvarianten von (1a) (welches System auch in der Form

$$dp_\alpha^h = \Omega_{\alpha\beta}^h du^\beta, \quad dx^h = p_\alpha^h du^\alpha \quad (1b)$$

geschrieben werden kann) in bezug auf (2) sind Differentialinvarianten der oben-erwähnten Konnexionen und der Größe Ω . Differentialinvarianten der Konnexionen sind algebraische Invarianten eines Systems von 6 Krümmungsgrößen (welche man in üblicher Weise mittels der Alternation der zweiten Ableitungen mit Operatoren $D_i, D_\alpha, \partial/\partial p_\alpha^h$ bekommen kann) und ihrer Ableitungen. Fortsetzung wird angekündigt.

Hlavatý (Praha).

Schouten, J. A., und J. Haantjes: Über die Festlegung von allgemeinen Maßbestimmungen und Übertragungen in bezug auf ko- und kontravariante Vektordichten. *Mh. Math. Phys.* **43**, 161—176 (1936).

In einer $X_n(\xi^1, \dots, \xi^n)$ sei u_λ ein Pseudovektor (dazu s. Schouten-Hlavatý, *Math. Z.* **30**, 414—432, und Schouten-Struik, *dies. Zbl.* **11**, 174) und $\tilde{L}(\xi, u)$ eine Pseudodichte vom Gewicht $k_0 \neq 1/n$, von der Klasse $+1$ i. b. auf u_λ und homogen im ersten Grade i. b. auf u . Dann ist

$$A^{\lambda\mu} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{L}^2}{\partial u_\lambda \partial u_\mu}$$

eine Tensordichte vom Gewicht $2k_0$. Vorausgesetzt, daß ihre Determinante sich nicht annulliert, kann man aus ihr in üblicher Weise einen quadratischen Tensor $\hat{a}^{\lambda\mu}$ mit der Determinante $1/\hat{a} \neq 0$ konstruieren. Aus dem — für eine Pseudovektordichte v^ν vom Gewicht h und Klasse r i. b. auf u_λ — üblichen Ansatz (s. o.)

$$\delta v^\nu = \left(\frac{\partial}{\partial \xi^\mu} v^\nu + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu v^\lambda - h \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda v^\nu + r p_\mu v^\nu \right) d\xi^\mu + \left(\frac{\partial}{\partial u_\mu} v^\nu + C_{\cdot\cdot\lambda}^{\mu\nu} v^\lambda - h C_{\cdot\cdot\lambda}^{\mu\nu} v^\nu + r q^\mu v^\nu \right) du_\mu \quad (1)$$

kann man die Konnexionskoeffizienten bestimmen, wenn man noch weitere invariante Bedingungen aufstellt. Aus (1) $\delta a^{\nu\lambda} = 0$ und (2) $C^{\mu[\lambda\nu]} = 0$ folgt $C_{\cdot\cdot\lambda}^{\mu\lambda}$ und $\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda$. Aus (3) $\delta \tilde{L} = 0$ folgen p_μ und q^ν . Aus (4) $\delta u_\lambda = 0$ und aus der Existenz der infinitesimalen Parallelogramme („Torsion“ Null; Ref.) folgen dann auch $\Gamma_{\lambda\mu}^\nu$, allerdings unter der Voraussetzung, daß sich ein gewisser Skalar (eine Determinante) nicht annulliert. — Eine allgemeinere Maßbestimmung (für die kovarianten Dichten von irgendeinem Gewicht k) entspringt aus dem Ansatz

$$\tilde{L} = \sqrt{\frac{\gamma(k, \xi, u)}{\gamma(k_0, \xi, u)}} (\hat{a})^{\frac{k-k_0}{2}} \hat{L},$$

wo die (in u homogene) Funktion γ so zu bestimmen ist, daß \hat{a} unabhängig von k ausfällt. Diese Forderung führt auf eine partielle Differentialgleichung für γ , deren Lösung in einem sehr speziellen Falle explizit angegeben wird. Eine analoge (m. m.) Theorie wird von den Verff. auch für den Fall entwickelt, wo statt \tilde{L} eine Pseudodichte $\tilde{N}(\xi^\lambda, u^\nu)$ vom Gewicht $-k$ und Klasse $+1$ in bezug auf den kontravarianten

Pseudovektor w gegeben wird. (Neben den von Autoren zitierten Arbeiten stehen noch folgende Arbeiten mit dem obigen Ansatz im engsten Zusammenhang: Ancochea, dies. Zbl. 9, 273; Bortolotti, vorsteh. Referat; Craig, dies. Zbl. 1, 167; 3, 75; 8, 180; 11, 176; Mira Fernandes, dies. Zbl. 11, 419; Hombu, dies. Zbl. 7, 328; 12, 177; Hokari, dies. Zbl. 12, 178; Kawaguchi, dies. Zbl. 2, 158; 5, 414; 6, 32; 8, 33; Yano, dies. Zbl. 10, 38 u. 420; 11, 420; Muto-Yano, dies. Zbl. 12, 419; 13, 227; Synge, dies. Zbl. 12, 88; Ślebodziński, dies. Zbl. 12, 317. Ref.) *Hlavatý.*

Schouten, J. A., und J. Haantjes: Beiträge zur allgemeinen (gekrümmten) konformen Differentialgeometrie. Math. Ann. 112, 594—629 (1936).

Der in einer vorläufigen Mitteilung angegebene Satz (vgl. dies. Zbl. 12, 226 und die Berichtigung des Referates in dies. Zbl. 13, 130) wird hier bewiesen. Der Beweis zerfällt in zwei Teile: 1. Die X_n mit gegebener quadratischen Tensordichte vom Gewicht $-2/n$, mit Determinante $+1$ (und Trägheitsindex n) wird zuerst in eine H_{n+1} eingebettet, und zwar unter folgenden Bedingungen: a) Längs X_n wird eine Projektordichte $a_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta, \gamma, \delta = 0, 1, \dots, n+1$) vom Gewicht $-2/(n+2)$ angenommen, welche folgenden Bedingungen Genüge leistet: Die Bestimmungszahlen der obenerwähnten Tensordichte in bezug auf die homogenen Koordinaten der X_n sind den Bestimmungszahlen der X_n -Komponente von $a_{\alpha\beta}$ proportional. Die Konnexion in H_{n+1} soll solche Koeffizienten $\Pi_{\beta\gamma}^\alpha$ besitzen, daß $\Pi_{[\beta\gamma]}^\alpha = 0$, $x^\gamma \Pi_{\beta\gamma}^\alpha = 0$ (x^α sind hier Koordinaten in H_{n+1} , in welchen die X_n mittels der Gleichung $x^{n+1} = 0$ bestimmt wird), $V_\alpha a_{\beta\gamma} = 0$ und $N_{\alpha\beta\gamma}^{\dots\alpha} = 0$ ($N_{\alpha\beta\gamma}^{\dots\delta}$ ist der Krümmungsprojektor dieser Konnexion). Neben diesen Bedingungen, welche vom Koordinatensystem unabhängig sind, werden noch andere auferlegt, welche nur in einem speziellen Koordinatensystem gelten. Aus allen diesen Bedingungen lassen sich eindeutig nicht nur die $a_{\alpha\beta}$ und $\Pi_{\beta\gamma}^\alpha$ längs X_n , sondern auch ihre Ableitungen (längs X_n) nach den Koordinaten der H_{n+1} bestimmen, und zwar im Falle daß $2 < n \neq 2p$. Somit kann $a_{\alpha\beta}$ sowie auch $\Pi_{\beta\gamma}^\alpha$ mittels Reihenentwicklung (mit vorausgesetzter Konvergenz) in die H_{n+1} fortgesetzt werden. — 2. Im zweiten Teile des Beweises wird untersucht, inwiefern die Wahl des eben verwendeten speziellen Koordinatensystems sowie auch die Wahl des Projektors $a_{\alpha\beta}$ die Konstruktion beeinflussen. Zu diesem Zwecke wird die X_n einmal in eine H_{n+1} , das andere Mal in eine andere H_{n+1} (welche mit \tilde{H}_{n+1} bezeichnet werden soll) eingebettet. Dabei wird verlangt, daß die oben angeführten Bedingungen für H_{n+1} und daneben auch für \tilde{H}_{n+1} gelten. Nun wird gezeigt, daß es eine Punkttransformation gibt, welche folgende Eigenschaften hat: Sie führt jeden Punkt der H_{n+1} in einen Punkt der \tilde{H}_{n+1} über, läßt jeden Punkt der X_n invariant und führt die Felder $a_{\alpha\beta}$, $\Pi_{\alpha\beta}^\gamma$ in die entsprechenden Felder $\tilde{a}_{\alpha\beta}$, $\tilde{\Pi}_{\alpha\beta}^\gamma$ der \tilde{H}_{n+1} über. — Damit wird der Satz bewiesen. *Hlavatý.*

Hokari, Shisanji: Über die Übertragungen, die der erweiterten Transformationsgruppe angehören. II. J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., Ser. I. Math. 4, 41—50 (1935.)

(Vgl., auch der Bezeichnung wegen, die Arbeit desselben Verf. in dies. Zbl. 12, 178.) Hier werden die Größen in bezug auf die Koeffizienten P_B^A , Q_B^A ($A, B, C = 1, \dots, m+n$) in üblicher Weise definiert, wobei

$$P_b^a = \frac{\partial \bar{y}^a}{\partial y^b}, \quad P_\lambda^\alpha = \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\lambda}, \quad Q_b^a = \frac{\partial y^a}{\partial \bar{y}^b}, \quad Q_\lambda^\alpha = \frac{\partial y^\alpha}{\partial \bar{x}^\lambda}, \quad P_\lambda^a = P_\alpha^a = Q_a^\alpha = Q_\lambda^\alpha = 0.$$

Aus dem Ansatz $\delta v^A = dv^A + A_{CB}^A dz^B v^A$ werden dann die Transformationsformeln für die Konnexionskoeffizienten abgeleitet und nachher der Zusammenhang dieser Geometrie mit einigen anderen (in dem obenerwähnten Referat angegebenen) Geometrien (sowie auch mit einem Fall von Hosokawa) festgestellt. Diese Geometrien lassen sich als Spezialfall der hier angegebenen ableiten. *Hlavatý (Praha).*

Takeno, Hyōtirō: Projective wave geometry. J. Sci. Hiroshima Univ. A 6, 147 bis 172 (1936).

In this paper the author constructs a wave geometry to Veblen's projective relativity (Erg. Math. 2, 1; this Zbl. 6, 419) by using the method of Morinaga (this

Zbl. 12, 232). The coordinates x^κ ($\kappa, \lambda, \dots = 0, 1, \dots, 4$) in the macroscopic space under the system of transformations $x^{\kappa'} = x^\kappa(x^1, \dots, x^4)$, $x^0 = x^0 + \log \varrho(x^1, \dots, x^4)$, $h = 1, \dots, 4$. The metric in microscopic space is defined by $ds\psi = \gamma_\mu dx^\mu \psi$ (Y. Mimura, this Zbl. 11, 231), in macroscopic space by $\gamma_{\lambda\kappa} = \gamma(\lambda\gamma_\kappa) = g_{\lambda\kappa} - \varphi_\lambda \varphi_\kappa$. It is shown that the connection $\Gamma_{\mu\lambda}^\kappa$ in macroscopic space induces a connection $\Lambda_{\mu\lambda}^\kappa$ in microscopic space (spin-space) for which $ds\psi = 0$ is invariant by parallel displacements, ψ satisfying the condition $\nabla_\mu \psi = R_\mu \psi$ (R_μ is an arbitrary chosen projective vector). The conditions for integrability of this equation, the generalized Dirac equation, are submitted to an extensive investigation. A sufficient condition is

$$R_{\nu\mu}^{[\lambda\kappa]} = \pm g^{-\frac{1}{2}} \mathcal{G}^{\lambda\kappa\varrho\sigma\tau} R_{\nu\mu\varrho\sigma} \varphi_\tau. \quad (1)$$

$\mathcal{G}^{\lambda\kappa\varrho\sigma\tau}$ is the n -vector density of weight $+1$ and $R_{\nu\mu\lambda}^\kappa$ the curvature tensor derived from $\Gamma_{\mu\lambda}^\kappa$. From (1) follows $R_{\mu\lambda} = 0$. The author expresses this equation in the affine form, he then obtains the Einstein and de Sitter law of gravitation and an equation for φ_λ , which corresponds to Maxwell's electromagnetic equation in vacuum.

J. Haantjes (Delft).

Sibata, Takasi, and Kakutarô Morinaga: Complete and simpler treatment of wave geometry. J. Sci. Hiroshima Univ. A 6, 173—189 (1936).

If $\gamma_i, i, j, \dots = 1, \dots, 4$, are 4×4 matrices satisfying the relation $\gamma_i \gamma_j = g_{ij} I$, the equation $\varrho^i \gamma_i \psi = 0$ admits a solution ϱ^i . The authors distinguish two cases: (I) The rank of the matrix $\gamma_i \psi$ is 3; (II) This rank is 2, in this case there exist two independent solutions ϱ_1^i and ϱ_2^i . Now the authors consider parallel displacements, which make $\varrho^i \gamma_i \psi = 0$ invariant. Is $\bar{\varrho}^i$ a vector at the point $x + dx$, parallel to ϱ^i at x , this condition is $\bar{\varrho}^i (\gamma_i \psi)_{x+dx} = 0$. It is supposed that the displacement Γ_{ji}^h is given. Then this condition leads to a differential equation for ψ and the conditions of integrability are written down. The equation for ψ is completely integrable if in case I: $V_j g_{ih} = Q_j g_{ih}$, $R_{kji}^h = (\partial_{[k} Q_{j]}) g_{ih}$, in case II: $V_j g_{ih} = Q_j g_{ih}$; $\frac{1}{2} \sqrt{\Delta} \epsilon_{ihlm} R_{kj}^{lm} = \pm R_{kji}^h$ (comp. this Zbl. 12, 232). It is shown, that under certain assumptions for the second case the equation for ψ is identical with the equation obtained by Morinaga (this Zbl. 12, 232).

J. Haantjes (Delft).

Morinaga, Kakutarô, and Hyôitirô Takeno: On some solutions of $\frac{\sqrt{\Delta}}{2} \epsilon_{stpq} K_{lm}^{pq} = K_{lmst}$. J. Sci. Hiroshima Univ. A 6, 191—201 (1936).
Mimura, Yosataka: Microscopic field theory. J. Sci. Hiroshima Univ. A 6, 203 bis 215 (1936).

Sibata has given an approximate solution g_{ij} ($i, j, \dots = 1, \dots, 4$) of the Morinaga equation $\frac{1}{2} \sqrt{\Delta} \epsilon_{stpq} K_{lm}^{pq} = K_{lmst}$ (this Zbl. 12, 233). The first paper gives the approximate solutions $g_{ij}^* = \delta_j^i + h_{ij}$, $|h_{ij}| \ll 1$, satisfying the conditions $g_{14} = g_{24} = g_{34} = g_{13} = g_{23} = 0$, $g_{33} = g_{44} = 1$. From these solutions the authors obtain the following two finite solutions

$$(1) \quad g_{11} = 1 \mp i\varphi(y, z), \quad g_{12} = \varphi(y, z), \quad g_{22} = 1 \pm i\varphi(y, z); \quad y = x^3 \pm ix^4, \quad z = x^1 \pm ix^2,$$

where $\varphi(y, z)$ is an arbitrary function. It is shown that this g_{ij} cannot be transformed into an orthogonal form, $g_{ij} = 0$ ($i \neq j$), by any real coordinate transformation. — The second paper gives a physical interpretation of the solution (1), these equations representing the g_{ij} -field of an elementary particle having a spin in the $\pm x^3$ -direction. The g_{ij} need not to be real. The real and imaginary parts of g_{ij} satisfy equations of the Maxwell form. Therefore these parts may be interpreted to represent the magnetic-like and electric-like gravitational force.

J. Haantjes (Delft).

Topologie:

Birkhoff, Garrett: On the combination of topologies. Fundam. Math. 26, 156—166 (1936).

Scorza Dragoni, G.: Sulle traslazioni piane del Brouwer doppiamente periodiche. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 23, 256—261 (1936).

T sei eine topologische, indikatrixerhaltende, fixpunktfreie Abbildung der Ebene π auf sich. Der Brouwersche Translationssatz besagt, daß es zu jedem Punkt $P \subset \pi$ ein ihn enthaltendes Translationsfeld gibt, das von zwei einfachen offenen, sich bei T entsprechenden Kurven begrenzt wird. Ist in π ein kartesisches Koordinatensystem (x, y) fixiert, und ist T sowohl bezüglich x wie bezüglich y periodisch, also vertauschbar mit allen Transformationen der Form $T_1^{k_1} \cdot T_2^{k_2}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), wo T_1 die Form $(x, y) \rightarrow (x + t_1, y)$ und T_2 die Form $(x, y) \rightarrow (x, y + t_2)$ hat, so läßt sich (nach Aufgabe der Forderung, daß das Feld einen willkürlich vorgegebenen Punkt P enthalten soll) ein Translationsfeld konstruieren, das von zwei einfachen offenen, sich bei T entsprechenden Kurven begrenzt wird, und derart, daß eine Transformation $T_1^{k_1} \cdot T_2^{k_2}$, wo entweder $k_1 \neq 0, k_2 \neq 0$ und $(k_1, k_2) = 1$ oder das eine $k_i = 0$ und das andere k_i gleich 1 ist, existiert, die jede der Randkurven in sich überführt. *H. Busemann.*

Seifert, H.: Algebraische Approximation von Mannigfaltigkeiten. Math. Z. 41, 1—17 (1936).

Ob man aus einer topologischen (und sogar differenzierbaren) Einbettung einer m -dimensionalen Mannigfaltigkeit \mathcal{M}^m im euklidischen Raum \mathcal{R}^n eine algebraische Einbettung ableiten kann? — Der Verf. betrachtet diesen Sonderfall des 16. Hilbertschen Problems (vgl. Hilberts Vorträge auf dem Internationalen Math.-Kongreß zu Paris). Das Hauptresultat ist der Satz 3: „Ist eine orientierbare geschlossene Mannigfaltigkeit \mathcal{M}^m zweimal stetig differenzierbar in den euklidischen \mathcal{R}^n eingelagert und gibt es auf \mathcal{M}^m $n - m$ stetige Felder von orientierten Normalen, die in jedem Punkte linear unabhängig sind, so läßt sich \mathcal{M}^m durch eine beliebig kleine isotope Deformation in einen reellen Zweig einer algebraischen Mannigfaltigkeit überführen.“ Doch nicht für jede geschlossene Mannigfaltigkeit gibt es solche Felder, wie man sich ohne weiteres hätte denken können. Zunächst ist dies bei den nichtorientierbaren Mannigfaltigkeiten, aber auch bei gewissen orientierbaren Mannigfaltigkeiten der Fall (s. E. Stiefel, Richtungsfelder und Fernparallelismus in n -dimensionalen Mannigfaltigkeiten. Comment. math. helv. 8). Dagegen gibt es solche Felder für $n - m = 1$ und auch für $n - m = 2$ bei orientierbaren Mannigfaltigkeiten (Satz 1). — Die Frage, ob sich \mathcal{M}^m durch eine aus einem einzigen reellen Zweige bestehende algebraische Mannigfaltigkeit darstellen läßt, bleibt unentschieden. Nur für $n - m = 1$ und $n = 3, m = 1$ gibt der Verf. die vollständige Lösung. — Satz 4: Eine orientierbare geschlossene Mannigfaltigkeit \mathcal{M}^{n-1} , die zweimal stetig differenzierbar in den \mathcal{R}^n eingelagert ist, läßt sich durch eine beliebig kleine isotope Deformation in eine (aus einem einzigen reellen Zweige bestehende) algebraische Mannigfaltigkeit überführen. — Satz 5: Zu jedem Knoten des \mathcal{R}^3 gibt es eine nur aus einem Zweige bestehende algebraische Kurve, die ebenso verknötet ist. — Außerdem folgt aus dem Satze 1 und der erwähnten Arbeit von E. Stiefel unmittelbar Satz 2: Eine orientierbare m -dimensionale Mannigfaltigkeit \mathcal{M}^m von ungerader Charakteristik läßt sich nicht (zweimal stetig differenzierbar) in den euklidischen \mathcal{R}^{m+2} , also erst recht nicht in den \mathcal{R}^{m+1} einbetten. *W. Ephrämowitsch.*

Reidemeister, Kurt: Automorphismen von Homotopiekettenringen. Math. Ann. 112, 586—593 (1936).

Es seien α_i^k ($i = 1, 2, \dots, \alpha_n$) die k -dimensionalen Zellen eines Fundamentalbereichs des universellen Überlagerungskomplexes eines n -dimensionalen Komplexes \mathcal{K} , γ_i die Elemente der zugehörigen Fundamentalgruppe, $x = \sum n_i \gamma_i$ die Elemente des Gruppenringes der Fundamentalgruppe (n_i ganz rational). Eine Kette der Dimension k ist eine Linearkombination $\mathfrak{x}^k = \sum_{i=1}^{\alpha_k} x_i \alpha_i^k$. Ihr Rand ist gegeben durch $R(\mathfrak{x}^k) = \sum x_i R(\alpha_i^k) = \sum x_i r_{ij}^k \alpha_j^{k-1}$. Dabei ist r_{ij}^k die k -te Inzidenzmatrix. Die Kettengruppe mit den aufgeprägten Berandungsrelationen heißt der Homotopie-

kettenring des Komplexes \mathfrak{K} . — Unter einer automorphen Abbildung des Homotopiekettenringes wird eine Abbildung T mit den Eigenschaften

$$T(\mathfrak{x}_1^k + \mathfrak{x}_2^k) = T(\mathfrak{x}_1^k) + T(\mathfrak{x}_2^k); \quad T(\gamma \mathfrak{x}^k) = \bar{\gamma} T(\mathfrak{x}^k); \quad T(R(\mathfrak{x}^k)) = R(T(\mathfrak{x}^k))$$

verstanden. Hieraus folgt, daß T eine — ebenfalls mit T bezeichnete — automorphe Abbildung des Gruppenringes und der Fundamentalgruppe induziert. Man hat $T(\mathfrak{x}^k) = T(\sum x_i \alpha_i^k) = \sum T(x_i) T(\alpha_i^k)$. Setzt man $T(\alpha_i^k) = \sum t_{ij}^k \alpha_j^k$, so ist hiernach der Automorphismus des Homotopiekettenringes durch den Automorphismus $\bar{\gamma} = T(\gamma)$ der Fundamentalgruppe und durch die Matrizen t_{ij}^k festgelegt. — Zwei Gruppenelemente γ und γ' werden konjugiert bezüglich T genannt, wenn es ein Gruppenelement κ mit $\gamma' = T(\kappa) \gamma \kappa^{-1}$ gibt. Ist ferner $x = \sum n_i \gamma_i$ ein beliebiges Element des Gruppenringes, so wird unter $|x|$ die Summe der Klassen nach T konjugierter Elemente $|x| = \sum_i n_i T(\gamma_i) \gamma_i \kappa_i^{-1}$ mit beliebigen Variablen κ_i verstanden. Mit Hilfe

dieser Definitionen gelingt es nun, die Hopfsche Spurinvariante eines Komplexes auf Homotopiekettenringe zu übertragen. Ist $s^k = \sum_i t_{ii}^k$ die Spur der Matrix t_{ij}^k und $s = \sum_{k=0}^n (-1)^k s^k$, so wird bewiesen, daß $|s|$ invariant ist gegenüber Basiswechsel sowie Erweiterungen und Reduktionen des Homotopiekettenringes. Die Invariante $|s|$ gibt Aufschluß über die algebraische Anzahl der Fixpunkte einer Fixpunktclassse, doch wird nur die kombinatorische Seite dieser Frage behandelt. *H. Seifert* (Heidelberg).

Relativitätstheorie.

Karapetoff, Vladimir: Restricted theory of relativity in terms of hyperbolic functions of rapidities. *Amer. Math. Monthly* 43, 70—82 (1936).

Eselangon, Ernest: Sur la dynamique de la relativité restreinte appliquée aux forces centrales. *Cas des planètes*. *C. R. Acad. Sci., Paris* 202, 1469—1472 (1936).

Eselangon, Ernest: Sur les équations de la dynamique déduites du principe de relativité restreinte. *C. R. Acad. Sci., Paris* 202, 1353—1356 (1936).

This note follows three others by the author (this *Zbl.* 13, 233, 287 and 328). In it he concludes that formulae for acceleration in special relativity preserve their form under Lorentz transformations.

H. S. Ruse (Edinburgh).

Burgatti, Pietro: Sopra un modo di pervenire alla cinematica della teoria della relatività ristretta. *Rend. Accad. Sci. Ist. Bologna, N. s.* 38, 101—109 (1934).

A deduction of the Lorentz transformation on the sole assumption that the velocity of material bodies, relative to any observer, cannot exceed a definite limiting value c .

H. S. Ruse (Edinburgh).

Levi-Civita, T.: Sulla nozione di intervallo fra due avvenimenti: primo approccio alla teoria della relatività. *Nuovo Cimento, N. s.* 13, 45—65 (1936).

The author gives a development of special relativity in which the concept of interval is fundamental, the Lorentz transformation being deduced from the assumption of the invariance of interval. The object of the paper is to show how relativity may be established in a simple and natural fashion from elementary physical considerations, without the introduction of ideas of a conventional geometrical character. Thus the central feature of the paper (the establishment of the formula $ds^2 = c^2 dt^2 - dl^2$ for interval) is based upon a series of arguments which are constructed with a view to their physical plausibility. The paper is the outcome of the author's teaching experience, and is presented chiefly for its methodology. *H. S. Ruse* (Edinburgh).

Levi-Civita, T.: Points matériels et corps célestes en relativité générale. *Étude préliminaire*. *Jubilé de Marcel Brillouin* 203—212 (1935).

In this contribution to the Jubilee volume of M. Marcel Brillouin, the author takes as his starting-point a remark of Brillouin, that whereas in Newton's theory

of gravitation the field of force in which a body (such as a planet) moves is determined by the other bodies in the field, and not by the moving body itself, there is no obvious reason for believing that this is still true in the general theory of relativity. In this paper it is shown that Brillouin's doubt is well founded: in general relativity it would be incorrect to ignore the effect of the moving body's own gravitation. However, under certain assumptions as to the nature of the body, and restricting the discussion to the second approximation (which is generally sufficient for astronomical applications of the classical type), it is still possible to reduce the equations of the problem of n bodies to a set of differential equations of order $6n$, as in Newtonian mechanics, provided we introduce in these differential equations, besides the positions and velocities of the centres of gravity of the bodies, two constants characteristic of each body, namely its mass and its baripotential, i.e. the value of the potential due to the body itself at its centre of gravity.

Whittaker (Edinburgh).

Temple, G.: Gauss's theorem in general relativity. Proc. Roy. Soc. London A **154**, 354—363 (1936).

The author seeks the widest possible generalization of the classical Gauss' theorem for gravitation (surface-integral of normal gravitational force = const. \times enclosed mass). Unlike Whittaker, who first considered the problem of extending Gauss' theorem to relativity (this Zbl. **11**, 377; see also Ruse and Combridge, this Zbl. **12**, 180 and **13**, 40 resp.), he does not partition the world into space and time, but takes the surface of integration to be any closed twofold region in the 4-dimensional world. The theorem is a deduction from the generalized Stokes's theorem, and is expressed in the form surface integral = volume integral, the latter being taken over any threefold region having the surface as contour. — The gravitational tensors are then expanded as power series in the constant of gravitation γ , and attention is concentrated on the leading terms. This reveals a privileged set of coordinate-systems in terms of which may be defined a distant parallelism which is intrinsic in the geometry of the gravitational field, and enables Gauss' theorem to be constructed in an explicit form.

H. S. Ruse (Edinburgh).

Langevin, P.: Espace et temps dans un univers Euclidien. Jubilé de Marcel Brillouin 426—435 (1935).

The author investigates the metrics which are statical and for which moreover the Riemann tensor vanishes, and thus arrives at the metric which has been discussed by other writers [cf. e.g. Proc. Roy. Soc. **116**, 720 (1927)] under the name of the "quasi-uniform gravitational field".

Whittaker (Edinburgh).

Quantentheorie.

Margenau, Henry: Quantum-mechanical description. Physic. Rev., II. s. **49**, 240—242 (1936).

In Zusammenhang mit dem von Einstein, Podolsky und Rosen hervorgehobenen Paradoxon (dies. Zbl. **12**, 42) wird der Standpunkt eingenommen, daß der Zustand eines quantenmechanischen Systems — entgegen der üblichen Auffassung — nie durch eine einzige Messung festgelegt sein kann.

O. Klein (Stockholm).

Dugas, René: Sur la réalité de la mécanique quantique. C. R. Acad. Sci., Paris **202**, 636—638 (1936).

Das von Einstein, Podolsky und Rosen aufgestellte Realitätskriterium (dies. Zbl. **12**, 42) wird im Hinblick auf die quantentheoretische Naturbeschreibung kritisch betrachtet.

O. Klein (Stockholm).

Einstein, Albert: Physik und Realität. J. Franklin Inst. **221**, 313—347 (1936).

Auf dem Hintergrund einer ausführlichen historisch-erkenntnistheoretischen Auseinandersetzung wird der Standpunkt verteidigt, daß ein tieferes Verständnis der

Elementarquanta nicht von seiten der Quantentheorie, sondern von der allgemein-relativistischen Feldtheorie zu erwarten ist. *O. Klein* (Stockholm).

Pastori, M.: Meccanica quantistica e relatività. Rend. Semin. mat. fis. Milano 8, 31—53 (1934).

Zusammenfassender Bericht. Enthält eine nützliche Zusammenstellung der Literatur über Vereinigung von Quantenmechanik und allgemeiner Relativitätstheorie. *S. Flüge.*

Dirac, P. A. M.: Does conservation of energy hold in atomic processes? Nature 137, 298—299 (1936).

In Zusammenhang mit Versuchen von Shankland [Physic. Rev. 49, 8 (1936)], die auf eine Unabhängigkeit der Emissions- und Absorptionsprozesse hinzuweisen scheinen, wird hervorgehoben, daß alle gesicherten Resultate der Quantentheorie beibehalten werden können in einer Theorie, wo die individuelle Gültigkeit des Energie-Impulssatzes in Prozessen mit schnellen Teilchen durch eine statistische Gültigkeit im Sinne der Theorie von Bohr, Kramers und Slater ersetzt wird. *O. Klein.*

Franz, Walter: Zur Methodik der Dirac-Gleichung. S.-B. Bayer. Akad. Wiss. 1935, 379—435 (H. 3).

Systematische Durchführung der von Sauter gegebenen Anregung, die Eigenschaften und Folgerungen der Diracschen Gleichung zu entwickeln ohne Spezialisierung der Diracschen Matrizen α_k ($k = 1, 2, 3, 4$); und zwar in der Weise, daß die Wellenfunktion ψ formal selber als hyperkomplexe Größe angesetzt wird. Die anzuwendenden Sätze sind zum Teil allgemeine Sätze der Theorie der Clifford-schen Zahlen, von denen die Diracschen α_k -Größen mit $\alpha_k \alpha_l + \alpha_l \alpha_k = 2\delta_{kl}$ einen Spezialfall bilden. — Inhaltsübersicht: Theorie der Diracgleichung. Theorie der Pauligleichung. Die Diracgleichung und ihre Adjungierte. Physikalische Deutung. Der Zahlkörper der Diracschen Operatoren. Reduktion des Lösungssystems. Unabhängigkeit der physikalischen Ergebnisse von der speziellen Reduktion. Bildung der Adjungierten. Realitätseigenschaften. Transformationseigenschaften. Normierungsbedingungen. Vollständigkeitsrelation. Fragen der praktischen Rechnung. Rechenregeln. Wechsel des Koordinatensystems. Normierungsfragen. Beziehungen zwischen den physikalischen Größen. Beziehungen zwischen Mittelwerten im stationären Zustand. Spinmittelung. Anwendungen. Übergang von der Dirac- zur Pauli-gleichung. Elektron im Zentralfeld. Bemerkungen über die Wellenfunktionen des freien Elektrons. Iterierte Diracgleichung. Algebra der Clifford-schen Zahlen.

P. Jordan (Rostock).

Saha, M. N.: The origin of mass in neutrons and protons. Indian J. Physics a. Proc. Indian Assoc. Sci. 10, 141—153 (1936).

Vermischte Bemerkungen über elektromagnetische Masse des Elektrons, Konstitution von Proton und Neutron, Diracsche Magnetpole, Massenverhältnis Proton—Elektron. *P. Jordan* (Rostock).

Placinteanu, J. J.: Sur l'équation du photon. J. Physique Radium, VII. s. 7, 127 bis 132 (1936).

Es wird eine Wellengleichung vom Diracschen Typus aufgestellt, welche das Verhalten eines Lichtquants beschreiben soll auf Grund der Annahme, daß dasselbe aus einem positiven und einem negativen Elektron zusammengesetzt ist. *O. Klein.*

Kemmer, N., and V. Weisskopf: Deviations from the Maxwell equations resulting from the theory of the positron. Nature 137, 659 (1936).

Nachprüfung des von Euler und Kokkel erhaltenen Resultats, nach welchem (bei alleiniger Berücksichtigung von Frequenzen $\nu \ll mc^2/h$) die Lagrangefunktion des Maxwellschen Feldes die Gestalt

$$L = \frac{1}{8\pi} (\mathfrak{E}^2 - \mathfrak{B}^2) + \frac{e^4 \hbar}{m^4 c^7} [\alpha (\mathfrak{E}^2 - \mathfrak{B}^2)^2 + \beta (\mathfrak{E} \mathfrak{B})^2] + \dots$$

mit $\alpha = 1/360 \pi^2$, $\beta = 7/360 \pi^2$ hat. Da Euler-Kokkels Rechnungen (betreffend die Streuung von Licht an Licht) nicht nur die Diracsche Löcheridee als solche,

sondern auch noch das spezielle Dirac-Heisenbergsche Verfahren zur Subtraktion störender divergenter Glieder benutzen, könnte ihre Bestimmung der Konstanten α und β Zweifeln ausgesetzt sein. Deshalb untersuchen die Verff. die Streuung von Licht durch ein elektrostatisches Feld, wobei sich ohne Zuhilfenahme der erwähnten spezielleren Annahmen dieselben Konstanten α, β ergeben. Demnach wird man den Euler-Kokkelschen Wirkungsquerschnitt der Streuung von Licht an Licht für ebenso zuverlässig halten dürfen wie den Bethe-Heitlerschen Wirkungsquerschnitt für Paarernerzeugung.

P. Jordan (Rostock).

Pauli, W., and M. E. Rose: Remarks on the polarization effects in the positron theory. Physic. Rev., II. s. 49, 462—465 (1936).

Vereinfachte und verbesserte Herleitung des Vierervektors der induzierten Ladungsdichte in der Löchertheorie. Wenn man sich, wie üblich, auf die in der Feinstrukturkonstanten linearen Glieder beschränkt (was eine Beschränkung auf ebene Wellen ermöglicht), genügt es nach Serber, den Fall verschwindenden Vektorpotentials $\mathfrak{A}=0$ zu berücksichtigen und nur die induzierte Ladungsdichte (nicht auch den Strom) zu berechnen; das übrige ergibt sich dann leicht. Aus Heisenbergschen Formeln ergibt sich durch geschickte Anwendung des „Subtraktionsprinzips“ der Löchertheorie so gleich, daß die induzierte Ladung proportional ist mit einem gewissen Integral

$$f(\mathfrak{k}, k_0) = \frac{1}{\pi k^2} \int \left\{ \frac{\varepsilon \varepsilon' - \left(q^2 + 1 - \frac{k^2}{4} \right)}{\varepsilon \varepsilon'} \cdot \frac{\varepsilon + \varepsilon'}{(\varepsilon + \varepsilon')^2 - k_0^2} - \frac{k^2}{4} \left[1 - \frac{q^2 \cos^2 \vartheta}{1 + q^2} \right] \frac{1}{(1 + q^2)^{\frac{1}{2}}} \right\} dq.$$

Dies Integral wurde schon von Serber untersucht; doch ist eine direktere und vollständigere Berechnung möglich. Allgemein ist (auch für $\mathfrak{A} \neq 0$) bei einem ebenen Wellenvorgang der induzierte Viererstrom proportional dem ursprünglichen mit einem Faktor

$$-\frac{2e^2}{\hbar c} f(L) = -\frac{1}{3} \left\{ -\frac{5}{3} + \frac{1}{L} + \frac{(L+1)(2L-1)}{L} \varphi(L) \right\},$$

$$\varphi(L) = \int_0^1 dz [1 + L(1 - z^2)]^{-1} = \begin{cases} \frac{\log(\sqrt{1+L} + \sqrt{L})}{\sqrt{L(1+L)}} & \text{für } L > 0, \\ \frac{\arcsin \sqrt{-L}}{\sqrt{-L(1+L)}} & \text{für } -1 < L < 0, \\ \frac{-\log(\sqrt{-(1+L)} + \sqrt{-L})}{\sqrt{L(1+L)}} & \text{für } L < -1. \end{cases}$$

Insbesondere also wird

$$f(L) = \begin{cases} -\frac{4L}{15} & \text{für } |L| \ll 1, \\ \frac{5}{9} - \frac{2}{3} \log(2\sqrt{L}) & \text{für } L \gg 1. \end{cases}$$

Dabei bedeutet L den Wert

$$L = \frac{k^2 - k_0^2}{4}; \quad k = |\mathfrak{k}|,$$

wenn die fragliche ebene Welle eine Amplitude proportional $\cos(\mathfrak{k}r - k_0 t)$ hat. — Die Arbeit enthält ferner noch eine vollständigere Ermittlung der (von Uehling für sehr kleine und sehr große r bestimmten) Funktion $U(r)$, welche für die Wechselwirkungsenergie $V(r)$ zweier Ladungen $Z'e, Z''e$ im Abstand r maßgebend ist:

$$V(r) = Z'Z''e^2 \left\{ \frac{1}{r} - \frac{2e^2}{\hbar c} U(r) \right\}.$$

Das Ergebnis lautet

$$U(r) = -\frac{1}{3r} \left\{ 2 \left(\frac{r^2}{3} + 1 \right) K_0(2r) - \frac{2r}{3} (2r^2 + 5) K_1(2r) + r \left(\frac{4r^2}{3} + 3 \right) B(2r) \right\};$$

$$K_0(x) = \int_1^\infty \frac{e^{-qx}}{\sqrt{q^2 - 1}} dq, \quad B(x) = \int_1^\infty \frac{e^{-qx}}{q\sqrt{q^2 - 1}} dq.$$

P. Jordan (Rostock).

Rabi, I. I.: On the process of space quantization. *Physic. Rev.*, II. s. 49, 324 bis 328 (1936).

Majoranas Berechnung der Übergangswahrscheinlichkeiten in einem rasch variierenden Magnetfeld [*Nuovo Cimento* 9, 43 (1932); dies. Zbl. 4, 185] wird auf den Fall eines Atoms mit Kernspin angewandt. Es ergibt sich so eine neue Methode zur Messung des Kernspins bei sehr kleinen Hyperfeinstrukturaufspaltungen, die auch eine Bestimmung des Vorzeichens des magnetischen Kernmoments erlaubt. *O. Klein.*

Goldstein, L.: Sur l'énergie d'échange dans les problèmes à nombreux électrons. *J. Physique Radium*, VII. s. 7, 141—145 (1936).

Es werden die Bedingungen für die Anwendbarkeit der Austauschenergie bei der Thomas-Fermischen Behandlung des Vielelektronenproblems untersucht. Indem er verlangt, daß die Austauschenergie stets kleiner sein soll als die kinetische Energie, kommt der Verf. zu dem Resultat, daß nur die Elektronen, deren Impuls groß ist gegenüber dem mittleren Impuls im Normalzustand des Wasserstoffatoms bei der Auswertung des Austauschintegrals zu berücksichtigen sind. *O. Klein* (Stockholm).

Sextl, Theodor: Zur Theorie der Streuung und Absorption von Teilchen durch Kerne. *I. Z. Physik* 99, 751—775 (1936).

Das Problem der Bestimmung der Eigenfunktionen für das abgebrochene Coulombfeld (Gamow-Potential) repräsentiert sich mathematisch als völlig analog zu den klassischen optischen Problemen der Beugung und wird mit der von dorthier geläufigen Methode der Reihenentwicklung nach Partialwellen (Entwicklung nach Kugelfunktionen) behandelt. Während man sich bisher stets auf das erste, kugelsymmetrische Glied ($l = 0$) der Entwicklung beschränkte, werden die Reihen hier vollständig ausgeschrieben. Von Wert dürfte dabei vor allem die gemeinsame und systematische Behandlung aller hierhergehörigen Teilprobleme sein, wie sie die folgende Gegenüberstellung und Disposition des Verf. zeigt: 1. freie, ungedämpfte und gedämpfte Schwingungen = radioaktiver Zerfall; 2. erzwungene, ungedämpfte Schwingungen = anomale Streuung; 3. erzwungene, gedämpfte Schwingungen = Atomzertrümmerung. — Das Lösungsverfahren stößt bei leichten Kernen auf Schwierigkeiten, da man dort mehr braucht als das bloße asymptotische Verhalten der Eigenfunktionen des Außenraums; dem Ref. scheint aber gerade in diesem Falle die zugrunde liegende Approximation der wahren Kräfte durch ein Potential sehr schlecht zu werden (vgl. die Arbeit von H. M. Taylor, dies. Zbl. 3, 96 u. 4, 428). Bedenken gegen die hier (wie bisher stets) benutzte Näherung erheben sich aber auch bei schweren Kernen; vgl. den Hinweis des Verf. auf die Wirkungsquerschnittsanomalien bei Neutronenstößen. — Numerische Anwendungen der angegebenen allgemeinen Formeln sollen noch folgen. *S. Flügge.*

Rajewski, V.: Bemerkung über die Einfangprozesse langsamer Neutronen. *Physik. Z. Sowjetunion* 9, 109—110 (1936).

Es wird erneut darauf hingewiesen, daß es unverständlich ist, daß der Wirkungsquerschnitt für die Einfangung von Neutronen durch schwere Kerne in gewissen Fällen erheblich größer ist als der Querschnitt für elastische Streuung. [Vgl. jedoch dazu den Erklärungsversuch von Bohr, *Naturwiss.* 24, 241 (1936); dies. Zbl. 13, 237.]

S. Flügge (Leipzig).

Bargmann, V.: Zur Theorie des Wasserstoffatoms. Bemerkungen zur gleichnamigen Arbeit von V. Fock. *Z. Physik* 99, 576—582 (1936).

Es wird die von Fock (vgl. dies. Zbl. 12, 184 u. 429) kürzlich entwickelte Methode zur Behandlung der Quantenmechanik des Wasserstoffatoms in Beziehung gebracht zu der von Pauli gegebenen matrixmechanischen Behandlung des Wasserstoffproblems.

O. Klein (Stockholm).

Coolidge, Albert Sprague, and Hubert M. James: Wave functions for $1s\ 2s\ ^1S$ helium. *Physic. Rev.*, II. s. 49, 676—687 (1936).

James, Hubert M., and Albert Sprague Coolidge: On the ground state of lithium. *Physic. Rev.*, II. s. 49, 688—695 (1936).

Knipp, Julian K.: Wave-mechanical treatment of the LiH molecule. J. chem. Phys. 4, 300—307 (1936).

Hebb, M. H.: On A -type doubling in $^3\Pi$ states of diatomic molecules intermediate between Hund's cases a and b. Physic. Rev., II. s. 49, 610—618 (1936).

Im Anschluß an die allgemeine theoretische Behandlung des Überganges zwischen den sogenannten Grenzfällen a und b der Abstufung der Kräfte in einer zweiatomigen Molekel durch van Vleck [Physic. Rev. 33, 467 (1929)] und an seine Rechnung der A -Aufspaltung beim $^2\Pi$ -Term wird hier der $^3\Pi$ -Term behandelt. Dabei wird neben der Entkopplung des Bahndrehimpulses von der Kernverbindungsline auch die Spin-Spin-Wechselwirkung der beiden Elektronen berücksichtigt. F. Hund (Leipzig).

Wilson jr., E. Bright, and J. B. Howard: The vibration-rotation energy levels of polyatomic molecules. I. Mathematical theory of semirigid asymmetrical top molecules. J. chem. Phys. 4, 260—268 (1936).

Für kleine Amplituden der Schwingungen und langsame Rotation setzt sich die Bewegung eines Punktsystems zusammen aus der Bewegung eines starren Kreisels und harmonischen Schwingungen der Normalkoordinaten. Es wird nun gezeigt, daß bei größeren Amplituden der Schwingungen, aber nach langsamer Rotation die Rotationsbewegung einem starren Kreisel entspricht, dessen „effektive Trägheitsmomente“ von dem Schwingungszustand abhängen. F. Hund (Leipzig).

Hylleraas, Egil A.: Über die formelmäßige Darstellung der Rotationsenergiekonstanten der Moleküle und ihre Anwendung zur Berechnung von Dissoziationsenergien. Naturwiss. 24, 279—280 (1936).

Cabannes, Jean: Sur le calcul des fréquences fondamentales des molécules symétriques. Jubilé de Marcel Brillouin 223—232 (1935).

Verf. gibt eine kurze Übersicht über wohlbekannte Eigenschaften der Schwingungen mehratomiger Moleküle, besonders bei Anwesenheit von Symmetrieelementen. Es folgen einige neue Anwendungen auf Moleküle mit cis- und trans-Isomeren ($CHCl = CHCl$ und ähnliche). Kronig (Groningen).

Trenkler, Friedrich: Eigenschwingungen mechanischer Molekülmodelle. III. Der ebene Sechser-Ring und seine Abkömmlinge. Physik. Z. 37, 338—345 (1936).

I., II. vgl. dies. Zbl. 10, 382 bzw. 11, 284.

Darrow, Karl K.: Contemporary advances in physics. XXX. The theory of magnetism. Bell Syst. Techn. J. 15, 224—247 (1936).

Elsasser, Walter M.: Sur la diffraction des neutrons lents par les substances cristallines. C. R. Acad. Sci., Paris 202, 1029—1030 (1936).

Verf. diskutiert den Einfluß der Interferenz auf die Streuung langsamer Neutronen an Kristallen und gelangt zu dem Ergebnis, daß diese unter Umständen zu einem beobachtbaren Effekt führt. Casimir (Leiden).

Darwin, C. G.: The inertia of electrons in metals. Proc. Roy. Soc. London A 154, 61—66 (1936).

Es wird gezeigt, daß Bestimmungen von e/m für die Metallelektronen mit Hilfe von Versuchen nach Art des Tolmanschen immer zu der wahren Masse führen müssen und nicht zu der scheinbaren, wie sie in der Quantentheorie der Leitfähigkeit eingeführt wird. Hierauf ist schon früher vom Ref. (Müller-Pouillet, Lehrb. d. Phys. 3d. IV, 4, S. 367, Braunschweig 1934) hingewiesen worden. Nordheim.

Peierls, R.: Statistical theory of superlattices with unequal concentrations of the components. Proc. Roy. Soc. London A 154, 207—222 (1936).

Für ihre Theorie des Ordnungsgrades von Legierungen haben Bragg und Williams [Proc. Roy. Soc. A 145, 699 (1934); 151, 540 (1935)] die Annahme zugrunde gelegt, daß die ordnenden Kräfte zwischen den Atomen relativ weitreichend sind, während Bethe [Proc. Roy. Soc. A 150, 552 (1935); dies. Zbl. 12, 45] für den Spezialfall gleicher Konzentration beider Komponenten den Fall durchrechnet, daß nur eine Wechsel-

wirkung zwischen Nachbaratomen besteht. Verf. erweitert die Betheschen Betrachtungen auf den Fall einer kubisch flächenzentrierten Struktur der Zusammensetzung AB_3 . Im Vergleich zu Bragg und Williams ergibt sich eine tiefere kritische Temperatur T_c (bei gleicher Energiedifferenz zwischen geordnetem und ungeordnetem Zustand), ein schärferes Einsetzen der Ordnung unterhalb T_c und eine Persistenz einer lokalen Ordnung zwischen Nachbaratomen auch bei höheren Temperaturen.

Nordheim (Lafayette, Indiana).

Solomon, J.: Les désintégrations provoquées par le rayonnement cosmique. J. Physique Radium, VII. s. 7, 71—76 (1936).

Mittels der von C. Møller angegebenen Methode zur Behandlung von quantenmechanischen Stoßproblemen wird die Wahrscheinlichkeit für das Herausstoßen eines schweren Teilchens durch ein Elektron hoher Energie abgeschätzt. Diese Wahrscheinlichkeit wird zu klein gefunden für die Erklärung der Anwesenheit von Protonen in der Höhenstrahlung. Ein übereinstimmendes Resultat folgt mittels der Berechnungsweise von Williams und Weizsäcker (vgl. dies. Zbl. 12, 379). O. Klein.

Klassische Theorie der Elektrizität.

Fischer, J.: Neuere Fragen und Anschauungen über Dimensionen, Einheiten und Maßsysteme der elektromagnetischen Größen. Z. Physik 100, 360—373 (1936).

Odone, F.: Sui sistemi assoluti di unità di misura. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 22, 513—517 (1935).

Giorgi, G.: A proposito delle induttività elettrica e magnetica. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 23, 171—175 (1936).

Benedictus, W.-H.: Nouvelle application du tenseur électromagnétique asymétrique de Maxwell-de Donder. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 22, 309—319 (1936).

Henriot, E.: Les moments d'impulsion dans la théorie électromagnétique. Jubilé de Marcel Brillouin 87—96 (1935).

Proca, Alexandre: Sur la définition du champ électromagnétique par des potentiels et sur le moment magnétique de l'électron. C. R. Acad. Sci., Paris 202, 641—643 (1936).

Verf. vertritt die etwas überraschende Meinung, daß die allgemeine Lösung der Maxwell'schen Gleichungen (und insbesondere eine durch den Hertz'schen Vektor darstellbare Lösung) nicht in bekannter Weise durch die Potentiale dargestellt werden kann. V. Fock (Leningrad).

Creedy, F.: The equivalent wave method—the use of vectors in studying electrical transients. J. Math. Physics, Massachusetts Inst. Technol. 14, 291—324 (1935).

Durch frühere Arbeiten ist gezeigt worden, daß Wanderwellen auf Übertragungsleitungen als Funktion der Zeit durch die einfachen Formeln $\exp(at)\sin bt$ und $\exp(at)\cos bt$ dargestellt werden können. Verf. zielt darauf hin, mit diesen einfachen Darstellungen als Grundlage eine Theorie der Beobachtung solcher Wanderwellen aufzustellen, wobei nur drei Konstanten, A , a und b , beobachtet werden müssen. Diese Konstanten können auch aus drei anderen beobachteten Daten abgeleitet werden, z. B. aus der integrierten Stromstärke, aus dem integrierten Quadrat der Spannung an den Sekundärklemmen eines Stromwandlers und aus dem integrierten Strom durch die Sekundärwindungen eines Stromwandlers, welche in Serie liegen mit dem Instrument und einem Kondensator. Verf. gibt Ausdrücke für die genannten drei Konstanten, ausgedrückt durch die zuletzt genannten Größen. Er erläutert, daß die drei ballistischen Instrumente ihre Ausschläge durch Spiegel und Lichtzeiger auf einer gemeinsamen lichtempfindlichen Papierrolle aufzeichnen könnten. Er bespricht die Form der aufgezeichneten Kurven, woraus z. B. gleich Schlüsse über relative Größe der Konstanten b und a gezogen werden können. Hierauf beschreibt er ausführlich, wie durch Verwendung von Koordinatenpapier mit Exponentialskalen eine einfache Auswertung der

aufgezeichneten Kurven stattfinden kann. Der weitere Teil der Arbeit beschäftigt sich mit Zahlenbeispielen, welche dartun, daß durch Gebrauch der vom Verf. erläuterten Methode Berechnungen über Wanderwellen mit derselben Einfachheit stattfinden können wie Berechnungen über die stationären Zustände auf Übertragungsleitungen mit Hilfe der üblichen Vektormethode. *M. J. O. Strutt* (Eindhoven).

Sona, Luigi: *Complemento alla nota: „Sulle vibrazioni elettromagnetiche di carattere armonico semplice“*. Atti Ist. Veneto Sci. etc. **94**, 629—633 (1935).

Two examples are given to illustrate the conclusions of the paper in question (see this Zbl. **12**, 187). The first is Hertz' solution of Maxwell's equations for the external field of a Hertzian oscillator, which is found not to satisfy Love's conditions and thus not to represent propagation of waves with a definite front to the motion; the second is the solution proposed by Love instead of Hertz' solution, which satisfies Love's conditions and represents waves with a definite front. *M. Slow-Taylor*.

Howell, W. T.: *Electromagnetic waves from a point source*. Philos. Mag., VII. s. **21**, 384—398 (1936).

The amplitudes along the wave-front of electric and magnetic force components from a point source may vary; deviations from the inverse first power law of variation with distance and differences of the phase velocity from the velocity of light as ordinarily understood may also occur. These deviations are here studied for spherical electromagnetic waves of the most general type. The general solutions of Maxwell's equations in spherical polar coordinates and the expressions for the force components are written down as series of products of associated Legendre functions and Bessel functions. The properties of combinations of these functions are investigated in order to study the variation with distance of the amplitude, intensity and phase of the forces. It is found that under certain conditions concentration of the radiation may take place. Expressions are derived for the outflow of energy and angular momentum. An appendix gives the derivation of asymptotic series of certain of the functions involved.

M. Slow-Taylor (Slough).

Niessen, K. F.: *Erdabsorption bei vertikalen Dipolantennen in großer Höhe über ebener Erde*. Ann. Physik, V. F. **25**, 673—687 (1936).

The work of two previous papers (this Zbl. **11**, 90 and **12**, 381) is here extended to the case when the height of the dipole above the earth is relatively large. Similar mathematical methods and various approximations are used to evaluate in this case the formula already deduced for the amount of energy absorbed in the earth and numerical deductions of the most and least advantageous heights for the dipole are made.

M. Slow-Taylor (Slough).

Klassische Optik.

Zuylen, J. van: *Zur qualitativen Untersuchung der sphärischen Abweichung optischer Systeme*. Physica **3**, 243—254 (1936).

Der Verf. berichtet über einige Abänderungen, die er bei der bekannten Hartmannschen Untersuchungsmethode optischer Systeme vorgenommen hat, um — wie er sagt — zur schnelleren Orientierung über den Korrektionszustand eines Objektivs eine qualitative Methode zu erhalten. Es wird ein quadratisches Gitter abgebildet und aus der Art der Verzeichnung Schlüsse auf den Korrektionszustand gezogen. Die Methode ähnelt der von Tschikolew für die Untersuchung von Scheinwerferspiegeln und der von Abbe für die Untersuchung der Sinusbedingung an Mikroskopobjektiven angegebenen. Der Verf. weist auf die Unterschiede dieser Methoden hin.

Picht (Berlin).

Searle, G. F. C.: *A maximum-minimum method of determining the cardinal points of a lens system*. Proc. Cambridge Philos. Soc. **32**, 138—143 (1936).

The author describes a method to determine the focal length of a system, in

which object and image space have the same refractive index. If t is the distance between the two principal points, u and v the distances between object (image) point from their principal points, respectively, then the distance Δ between object and image point is equal to $\Delta = u + t + v$ where u and v are connected by the equation

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f}. \quad \text{We find } \frac{d\Delta}{du} = 1 - \frac{f^2}{(u-f)^2} = \frac{u(u-2f)}{(u-f)^2}$$

which vanishes for $u = 0$, and $u = 2f$. Consideration of the second derivative shows that Δ is a maximum in one case, a minimum in the other. Thus, the focal length can be determined in this way and the author gives a practical experimental method for determining it. Characteristic also are the points of Bravais ($\Delta = 0$) where object and image coincide. These points can be obtained by solving a quadratic equation which, however, has not necessarily real solutions. *M. Herzberger.*

Staeble, F.: Die Seidelschen Bildfehler bei Beschränkung auf die erste Potenz der Linsendicken. Abh. bayer. Akad. Wiss., N. F. H. 30, 1–32 (1935).

The Seidel aberrations for thin lenses with finite distances have been studied frequently and used as a first approximation for the purpose of designing optical systems. But it is very important to study the influence of the thicknesses. Staeble now develops the formulae of Seidel in such a way that he neglects the second and higher powers of thicknesses and distances, considers therefore, thin lenses, but not as before infinitely thin lenses. — He introduces instead of the Seidel coefficient, proportional expressions which are independent of the focal lengths. He gives a method and a calculation scheme to show the part the first power of the lens thicknesses add to the errors of the thin lens, and investigates at the end the influence of the color errors. *M. Herzberger (Rochester).*

Silberstein, Ludwik: Corrigenda to „A simplified computation of Cartesian lens surfaces“. J. Opt. Soc. Amer. 26, 131 (1936).

The author corrects a sign error occurring in a series of equations in his paper which was abstracted in this Zbl. 13, 95. *M. Herzberger (Rochester, N. Y.).*

Herzberger, M.: On the characteristic function of Hamilton, the eiconal of Bruns, and their use in optics. J. Opt. Soc. Amer. 26, 177–180 (1936).

Die vorliegende Arbeit des Verf. ist gedacht als Einleitung zu verschiedenen demnächst folgenden Arbeiten über die Theorie der geometrisch-optischen Abbildung auf Grund der Theorie der Eikonalfunktionen. Da — wie der Verf. angibt — die Grundlagen dieser Theorie in Amerika bisher wenig bekannt sind, gibt er hier eine Darstellung dieser Grundlagen. Er bespricht die verschiedenen Eikonalbegriffe, das Punkteikonale, das Winkeleikonale und das gemischte Eikonale, sowie die zwischen diesen Eikonalen bestehenden Beziehungen, die mit ihnen in Zusammenhang stehenden Differentialbeziehungen sowie die Frage, wann die einzelnen Eikonale anwendbar sind. Die Differentialbeziehungen werden besonders für den Fall vorliegender Rotationssymmetrie des optischen Systems behandelt. — Neue Ergebnisse enthält diese Arbeit nicht. *Picht (Berlin).*

Uhler, Horace S.: Approximations to the Cartesian oval. J. Opt. Soc. Amer. 26, 128–130 (1936).

The author calls attention to the error in L. Silberstein's paper (cf. foreg. ref.). In addition, there is described another method of finding the first coefficient of development of the equation of a Cartesian surface into a series. The equation is so developed that the geometrical meaning of the terms can be easily seen, and the author shows, by some special examples, how excellent is his method of convergence. *Herzberger.*

Uhler, Horace S.: Extension of the domain of validity of the general formula for oblique deviation. J. Opt. Soc. Amer. 26, 89–90 (1936).

The author had demonstrated in a paper [Ann. Math. Monthly 28, 9 (1921)] that for a set of triangular prisms with parallel edges the following formula holds true. Let D be the angle between object and image ray, E the angle between the projection

of both rays into a plane perpendicular to all edges, η the angle between ray and projection (which remains unaltered provided the optical medium is the same in object and image spaces). Then, it holds

$$\sin \frac{D}{2} / \sin \frac{E}{2} = \cos \eta.$$

The author now generalizes his formula for each number of planes, refracting or reflecting forming triangular or multiangular prisms, provided only that first and last mediums are the same and that all intersection edges are parallel to each other. (The demonstration uses the spherical representation of the lightpath on the unit sphere.

M. Herzberger (Rochester).

Laue, M. v.: Bemerkung über Fraunhofersehe Beugung. S.-B. preuß. Akad. Wiss. 1936, 89—91.

Der Verf. formt das bei der Fraunhoferschen Beugung auftretende Integral

$$S(\alpha, \beta) = \iint e^{ik(\xi\alpha + \eta\beta)} d\xi d\eta$$

unter Benutzung des Gaußschen Satzes um und erhält

$$S(\alpha, \beta) = \frac{i}{k\eta^2} \int \eta_n e^{ik(r\eta)} ds \approx - \int r_\eta \cos(n, \eta) ds,$$

worin n die innere Normale des Rand-Linienelementes ds , ferner η ein Vektor mit den Komponenten α und β und r ein Vektor mit den Komponenten ξ und η ist. Er diskutiert dies Integral, besonders für den Fall, daß die Begrenzung zum Teil aus geradlinigen Stücken besteht, und zeigt, daß in diesem Fall — entsprechend der Aussage des von Straubel mitgeteilten Abbeschen Satzes — senkrecht zu jener geradlinigen Begrenzung durch deren Mittelpunkt im Beugungsbild, d. h. in der Brennebene des zur Beobachtung der Fraunhoferschen Beugung benutzten Fernrohrs, eine Lichtlinie, ein ausgeprägtes Intensitätsmaximum geht, dessen Intensität der Länge des geradlinigen Begrenzungsstückes proportional ist.

Picht (Berlin).

Conway, A. W.: Integrals of MacCullagh's equations. Proc. Roy. Irish Acad. A 43, 25—33 (1936).

Verf. bestimmt einige spezielle Lösungen der Maxwell'schen Gleichungen für doppelbrechende Kristalle. Die Gleichungen werden in der Form

$$(a^2 X, b^2 Y, c^2 Z) = \text{curl}(\alpha, \beta, \gamma) \\ - (\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}) = \text{curl}(X, Y, Z)$$

geschrieben. Die Hauptrolle spielt die Untersuchung der Gleichung

$$\left\{ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + b^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + c^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) - \right. \\ \left. - \left[a^2(b^2 + c^2) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + b^2(c^2 + a^2) \frac{\partial^2}{\partial y^2} + c^2(a^2 + b^2) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \frac{\partial^2}{\partial t^2} + a^2 b^2 c^2 \frac{\partial^4}{\partial t^4} \right\} U = 0,$$

welcher die Funktion $U = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$ genügt. *V. Fock (Leningrad).*

Berek, Max: Die Bestimmung der optischen Anisotropiekonstanten absorbierender Kristalldurchschnitte aus Polarisationsbeobachtungen im senkrecht reflektierten Licht. Z. Kristallogr. A 93, 116—135 (1936).

Es wird abgeleitet, wie man aus den Anisotropieeffekten der reflektierten Strahlung absorbierender Stoffe zwischen gekreuzten Nikols im Auflicht mittels eines elliptischen Analysators Anisotropieparameter bestimmen kann, die kennzeichnend sind für die optische Symmetrie, den komplexen optischen Charakter, die Höhe der komplexen Doppelbrechung und für das Verhältnis der beiden uniradiellen Reflexionsvermögen des Kristallschnittes. Die praktische Anwendbarkeit für diagnostische Zwecke wird diskutiert.

Laves (Göttingen).

Cotton, A.: Propriétés focales de certains réseaux obtenus par photographie. Jubilé de Marcel Brillouin 117—123 (1935).

Brüche, E., und A. Recknagel: Über Modelle elektrischer und magnetischer Felder der Elektronenoptik. Z. techn. Physik 17, 126—134 (1936).

Die Arbeit enthält zunächst einige allgemeine Betrachtungen über die modellmäßige Darstellung der Elektronenbewegung in elektrischen und magnetischen Feldern. Die modellmäßige Darstellung ist erwünscht, um den — im allgemeinen auch den Formeln der Bahnbewegung nicht anzusehenden — ziemlich verwickelten Verlauf der Elektronen in den genannten Feldern leicht übersehen zu können. Man ersetzt bei diesen Modellen das vorgelegte Feld durch einen Gebirgszug und die Schwerkraft, das Elektron durch eine sich unter dem Einfluß der Schwerkraft und seiner Anfangsgeschwindigkeit (nach Größe und Richtung) auf dem Gebirgsabhang bewegende Kugel. Die Projektion der Bahn auf die Horizontalebene entspricht der Bahn des Elektrons im vorgegebenen Feld. Es wird dann mathematisch abgeleitet, welche Bedingungen die das Gebirge darstellende Funktion $z = f(x, y)$ erfüllen muß, damit die Projektion der Bahn der Kugel auf die Horizontalebene der Bahn des Elektrons im vorgegebenen elektrischen oder magnetischen Felde entspricht. In den folgenden Abschnitten werden Modelle wichtiger Potentialfelder bei ebenen Bahnen, bei Raumbahnen sowie bei Vorliegen magnetischer Felder und elektromagnetischer Wechselfelder angegeben. Zur Darstellung der „Raumbahnen“ wird ein mitbewegtes Koordinatensystem eingeführt, von dem aus die Raumbahn als eben erscheint. Für die Wechselfelder wird ein „Wippenmodell“ angegeben. Picht (Berlin).

Thermodynamik und klassische kinetische Theorie der Materie.

Kwal, Bernard, et Jacques Solomon: Sur une conséquence de la nouvelle électrodynamique non linéaire. C. R. Acad. Sci., Paris 202, 933—934 (1936).

Die Born-Infeldsche Energiedichte

$$U = \frac{b^2}{4\pi} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{b^2} (\mathfrak{D}^2 + \mathfrak{B}^2)} - 1 \right)$$

ergibt eine Korrektur am Stefan-Boltzmannschen Gesetz: die schwarze Strahlung sollte danach statt der räumlichen Energiedichte $u = \sigma T^4$ eine durch

$$\frac{u \left(\frac{2\pi}{b^2} u + 1 \right)}{\left(\frac{4\pi}{b^2} u + 1 \right)^4} = \sigma T^4,$$

also angenähert

$$u = \sigma T^4 \left(1 + \frac{14\pi\sigma T^4}{b^2} \right)$$

gegebene Energiedichte besitzen. — Praktisch würde dies allerdings erst bei $T \sim 10^9$ grad merkbar werden. P. Jordan (Rostock).

Koenig, F. O.: Note on thermodynamic equilibrium in the gravitational field. J. phys. Chem. 40, 373—378 (1936).

Durch Einführung des Gravitationspotentials als unabhängiger Variabler werden die thermodynamischen Fundamentalgleichungen des Gravitationsfeldes in einer neuen und allgemeineren Gestalt abgeleitet. Mit Hilfe dieser Gleichungen wird das hydrostatische und das Sedimentationsgleichgewicht behandelt. Durch Einführung des Aktivitätskoeffizienten gelingt es, das Sedimentationsgesetz in einer neuen geschlossenen Form aufzustellen. H. Ulich (Aachen).

Cavallaro, Vincenzo G.: Su la formula classica delle velocità molecolari dei gas. Riv. Fis. Mat. Sci. Nat. 10, 290—292 (1936).

Fahir, E.: Contribution à l'étude cinétique des fluides denses à deux et à trois dimensions. Rev. Fac. Sci. Univ. Istanbul, N. s. 1, Fasc. 2, 8—13 (1936).

Auf Grund von kinetischen Betrachtungen läßt sich zeigen, daß auf die Längeneinheit der Berandung eines Stückes S der Oberfläche einer Flüssigkeit eine Kraft F

ausgeübt werden sollte, die der Gleichung $FS = RT$ genügt, worin R die absolute Gaskonstante ist. Die Versuche zeigen, daß diese Gleichung in der Tat erfüllt ist, daß jedoch der Wert von R zwischen der Hälfte und dem 20fachen des Wertes der absoluten Gaskonstanten variieren kann. Dies wird darauf zurückgeführt, daß die Moleküle der Flüssigkeit eine langgestreckte Gestalt haben und in bestimmter Weise orientiert sind und daß sie sich ferner wie elektrische Dipole verhalten. Es wird infolgedessen auf jedes solche Molekül ein durch die übrigen Moleküle erzeugtes elektrisches Feld einwirken und daher eine Kraft darauf ausgeübt, die bei der Ableitung der zweidimensionalen Zustandsgleichung berücksichtigt werden muß. Es wird gezeigt, wie man durch Lösung der Laplaceschen Gleichung das gesuchte elektrische Feld berechnen kann. *Fürth* (Prag).

Yates-Fish, N. L.: On the rotation of dipoles in elastic and viscous media. *Philos. Mag.*, VII. s. 21, 226—233 (1936).

Wenn ein Rotationskörper in einer zähen Flüssigkeit (Reibungskoeffizient η) mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotiert, erfährt er ein Drehmoment $-C_1\eta\omega$, wo C_1 eine Konstante ist, die von der Form und Größe des Körpers abhängt. Wenn derselbe Körper in einem elastischen Medium (Elastizitätsmodul E) um einen kleinen Winkel θ gedreht wird, erfährt er ein Drehmoment $-C_2E\theta$. Zweck der Arbeit ist, zu zeigen, daß (unter einigen allgemeinen Voraussetzungen) die beiden Konstanten C_1 und C_2 einander gleich sind. *V. Fock* (Leningrad).

Montagne, Pierre: Sur l'évolution des réactions dans des systèmes en équilibre chimique soumis à la détente adiabatique. *C. R. Acad. Sci., Paris* 202, 1430—1432 (1936).

Hückel, Erich: Bemerkung zur Thomsonschen Theorie der Kondensation an Ionen. *Physik. Z.* 37, 137—138 (1936).

Eine Überlegung von J. J. Thomson wird unter Berücksichtigung der Dielektrizitätskonstante des kondensierten Tropfens erweitert. *F. Hund* (Leipzig).

Finkelstein, B. N.: Zustandsgleichung von Lösungen starker Elektrolyte und Virialsatz. *Acta physicochim. (Moskva)* 3, 753—755 (1935).

The author continues a previous investigation on statistics and the virial-theorem of strong electrolytes (cf. this *Zbl.* 12, 48). It is pointed out that the proportionality between energy and free energy of the ions with a temperature-independent coefficient of proportionality holds true only for the case of the limiting law. At higher concentrations non-Coulombian forces will change this behaviour. *O. Halpern*.

Geophysik, Meteorologie, Geodäsie.

Hopfner, F.: Die potentialtheoretischen Grundlagen der Lehre von Isostasie. *Z. Geophys.* 12, 24—29 (1936).

Außer einer Zurückweisung der gegen Ackerls Entwicklung der Schwere am Geoid in einer Reihe nach Kugelfunktionen vorgebrachten Einwände und einer Ergänzung zu einem gegen die Arbeit des Verf. vorgebrachten Einwand, daß er nämlich die rechte Seite der Poissonschen Gleichung, die eine Dimension besitzt, mit der reinen Zahl α^2 (Quadrat der Abplattung) verglichen habe, geht der Verf. auf die Bedeutung, die die Anordnung der Schwerestörungen über Kontinent und Ozean für die Lehre von der Isostasie besitzt oder nicht besitzt, ein. Besonders die Tatsache, daß die Undulationen keine größeren Werte erreichen, scheint ihm, wenn auch nur bedingt, für die isostatische Massenordnung der Erde zu sprechen. *Brockamp* (Potsdam).

Syôno, S.: Free motion of the surface of a semi-infinite elastic solid. *Geophys. Mag.* 9, 285—296 (1935).

Using a cylindrical coordinate system the author discusses the free oscillations of the surface of a homogeneous half-space when subject to an assigned initial distri-

bution of normal displacements or velocities of the form $f(r) \cos n\theta$. Solutions in the form of infinite integrals involving the Bessel function $J_n(\alpha r)$ are obtained and the boundary conditions are satisfied by the aid of the Fourier-Bessel integral theorem. The surface displacements corresponding to the case of an initial normal displacement

$$f(r) \cos n\theta = \frac{A_n r^n}{(a^2 + r^2)^{n+3/2}} \cos n\theta, \quad n = 0,$$

are computed, and likewise those corresponding to an initial normal velocity expressed by the same formula. In the latter case the displacements remain of one sign, but when $n \neq 0$, the displacements may be expected to oscillate. *Louis B. Slichter.*

Arakawa, H.: On the general circulation of the atmosphere and its seasonal variations. *Geophys. Mag.* 8, 219—294 (1935).

Arakawa, H., and S. Ooma: Further discussions on the general circulation of the atmosphere. *Geophys. Mag.* 9, 195—210 (1935).

Die hydrodynamischen Bewegungsgleichungen (mit Navier-Stokesschem Reibungsterm), transformiert auf sphärische, mit der rotierenden Erde fix verbundenen Koordinaten (ϑ, λ, r) , werden unter den Vereinfachungen: 1. stationäre Strömung, 2. Vernachlässigung quadratischer Geschwindigkeitsglieder, zusammen mit der Kontinuitätsgleichung für inkompressible Flüssigkeiten dazu benutzt, das zur allgemeinen Zirkulation der Atmosphäre gehörende Strömungs- und Druckfeld $(v_\vartheta, v_\lambda, v_r; p)$ zu berechnen, wenn das Temperaturfeld (T) als Lösung der Laplaceschen Gleichung $\Delta T = 0$ durch eine Entwicklung nach (zonalen) Kugelfunktionen gegeben ist. Randbedingungen: $v_\vartheta = v_\lambda = v_r = 0$ für $r = R$ (Erdoberfläche); $v_r = 0$ und Verschwinden aller Tangentialspannungen für $r = R_1$ (Stratosphärenbasis); $p(\vartheta, \lambda, R) = p(\vartheta)$. Bezüglich der Lösungen, die durch sukzessive Approximation gewonnen werden:

$v_\lambda = \sum_0^\infty v_\lambda^{(n)}, v_r = \sum_0^\infty v_r^{(n)}$ usw., wobei die Funktionen $v_\lambda^{(n)}, v_r^{(n)}$ usw. für $n = 0$ den

Lösungen für die nichtrotierende Erde entsprechen, muß auf das Original verwiesen werden. Die erhaltenen Lösungen werden durch Vorgabe jahreszeitlich wechselnder Kugelfunktionsentwicklungen des T -Feldes (für einen troposphärischen Meridianschnitt) vom Typus

$$T = \sum_1^2 \left(A_m r^m + \frac{B_m}{r^{m+1}} \right) P_m(\cos \vartheta) \quad (R \leq r \leq R_1)$$

zur Diskussion der entsprechenden Veränderung des planetarischen Windsystems und der Verlagerung der Luftdruckgürtel benutzt. Eine einfache Abänderung der Randbedingungen soll die Anwendung der Lösungen auf die ozeanische Zirkulation ermöglichen, soweit dieselbe durch thermohaline Ursachen bedingt ist. — Die zweite Arbeit enthält die Durchführung der Rechnung für die Temperaturverteilung

$$T = \left(A_1 r^2 + \frac{B_1}{r^3} \right) P_2(\cos \vartheta) + \left(A_2 r^4 + \frac{B_2}{r^5} \right) P_4(\cos \vartheta). \quad H. Ertel.$$

Arakawa, H., and S. Ooma: On the general circulations of the ocean. *Geophys. Mag.* 9, 83—104 (1935).

Die hydrodynamischen Gleichungen für kleine stationäre Bewegungen auf nicht-rotierender Erde werden für eine Flüssigkeit mit konstantem innerem Reibungskoeffizienten gelöst für den stark vereinfachten Fall, daß die Dichteverteilung in situ durch die zonale Kugelfunktion 2. Ordnung gegeben ist, die Strömungsgeschwindigkeit am Boden verschwindet und nur meridionale Bewegungen stattfinden. *J. Bartels.*

Wagner, A.: Zur Theorie des täglichen Ganges der Windverhältnisse. *Gerlands Beitr. Geophys.* 47, 172—202 (1936).

Verf. unterzieht die Epsy-Köppensche Theorie des täglichen Ganges der Windstärke in der Bodenschicht und in der freien Atmosphäre einer eingehenden Prüfung

und kommt dabei zu dem Resultat, daß die einfache Mischregel für den Bewegungsimpuls, welche die Grundlage der Köppenschen Theorie bildet, infolge der dissipativen Vorgänge nicht ohne weiteres anwendbar ist, was schon aus dem Umstand hervorgeht, daß infolge der geringen Mächtigkeit der Bodenschicht gegenüber der des Höhenwindtypus die zeitliche Impulserhaltung in der ganzen Luftsäule unmöglich ist. Die Behandlung des Problems mit den Reibungsgleichungen führt unter der Bedingung, daß der Austauschkoeffizient keinen vertikalen Gradienten besitzt, zu dem Resultat, daß der Geschwindigkeitsbetrag in allen Höhen mit der Stärke des Austausch, d. h. der Konvektion, abnimmt. Das Bestehen des Bodenwindtypus mit maximaler mittäglicher Geschwindigkeit kann also nicht durch die Konvektion, sondern muß trotz dieser hervorgerufen werden. Erst bei Erweiterung der Theorie durch die Annahme eines von der Höhe abhängigen Austauschkoeffizienten ergibt sich unter Beachtung gewisser Grenzbedingungen, daß das durch diese Annahme in den Bewegungsgleichungen hinzutretende Glied das Stokessche Reibungsglied entgegengesetzten Vorzeichens in den bodennahen Schichten bedeutend überwiegt. Auf diese Weise läßt sich der Bodenwindtypus direkt aus dem täglichen Gang des vertikalen Austauschfalles erklären. Die Bodenreibung wirkt in Richtung einer Verstärkung dieses Typus. — Im zweiten Teil, welcher den Wind als Vektor behandelt, zeigt der Verf., daß die durch den Zusatzvektor verursachte Drehung des Windes mit täglicher Periode nicht ohne weiteres — wenigstens nicht für ebene Stationen — mit der täglichen Druckperiode in Beziehung gesetzt werden kann, zumal sich ein Einfluß der halbtägigen Druckschwankung auch bei größerer Amplitude nicht zeigt. Hingegen läßt sie sich durch das nichtstationäre Verhalten der Bewegungsvorgänge (Nachhinken der Drehung gegen die durch die Reibungsänderungen hervorgerufenen Geschwindigkeitsänderungen) erklären.

H. Philipps (Frankfurt a. M.).

Portig, W.: Beiträge zur Kenntnis der Tropopause. Beitr. Physik frei. Atmosph. **23**, 121—128 (1936).

Verf. untersucht zuerst die Häufigkeit der tropopausenlosen Tage, d. h. jener, in welchen sich eine Grenzfläche von den Eigenschaften der Tropopause durch Aufstiege nicht feststellen läßt. Dabei ergibt sich eine hohe negative Korrelation zwischen der Anzahl jener Tage und der Steiggeschwindigkeit der Ballone, die nach Ansicht des Verf. zurückzuführen ist auf eine absichtlich herbeigeführte Auftriebsverminderung des Ballons eben gerade bei solchen besonderen Wetterlagen (Kaltlufteinbrüchen), bei welchen die Tropopause in der Regel ihren Flächencharakter zu verlieren pflegt. In weiteren Korrelationsuntersuchungen kommt der Verf. zu dem Resultat, daß es nicht möglich ist, aus den Luftdruckänderungen in einem Niveau mit hinreichender Genauigkeit auf die Höhenänderungen der Tropopausenlage zu schließen. Danach wird die Höhenlage der Tropopause als lineare Funktion der Tropopausentemperatur und des Druckes in 10 km Höhe mittels der Methode der kleinsten Quadrate berechnet und festgestellt, daß sich ihre Abweichungen von den beobachteten Werten der Gaußschen Normalverteilung ganz gut anschmiegen. Der Verf. leitet schließlich aus den Rossbyschen Formeln für die Zustandsänderungen in atmosphärischen Luftsäulen (Beitr. Physik frei. Atmosph. **13**, 163) eine Theorie der Lageveränderungen der Tropopause ab unter der Hauptvoraussetzung, daß zwischen Stratosphäre und Troposphäre kein Luftmassenaustausch stattfindet. Bei Einsetzung von Zahlenwerten kommt er zu einem Vergleich zwischen der für die Lageänderungen theoretisch abgeleiteten und der statistisch abgeleiteten Formel. Der Koeffizientenvergleich läßt darauf schließen, daß die obige Voraussetzung nicht erfüllt ist. Unter Preisgabe dieser Bedingung gelangt der Verf. zu einer weiteren Formel, die wenigstens in bezug auf den Koeffizienten des Druckes in 10 km Höhe mit dem statistisch gefundenen übereinstimmt. Immerhin sind die Luftdruckschwankungen, welche die Theorie zur Veränderung der Tropopausenlage um einen gewissen Betrag erfordert, erheblich größer als die von der Statistik verlangten.

H. Philipps (Frankfurt a. M.).

Krastanow, L.: Über die Rolle der Kondensationskerne bei den Kondensationsvorgängen in der Atmosphäre. Meteorol. Z. 53, 121—125 (1936).

Als Grundlage seiner Untersuchungen benutzt Verf. die Gibbs-Volmerschen Gleichgewichtsgleichungen für die Keimbildung einer neuen Phase aus einer übersättigten. Danach befindet sich ein kugelförmiges Teilchen vom Radius r im labilen Gleichgewicht mit seiner Umgebung, wenn $p_r = p_\infty e^{2\sigma M / eRT r}$ ist (p_r = Druck des übersättigten Dampfes, p_∞ = Sättigungsdruck, σ = Oberflächenspannung, ϱ = Dichte, T = absolute Temperatur, R = Gaskonstante, M = Molgewicht). Als Stabilitätsmaß einer übersättigten homogenen Phase dient die Keimbildungsarbeit $W = \frac{4}{3}\pi\sigma r^2$ nach Gibbs. Aus der von Vollmer eingeführten Keimbildungsgeschwindigkeit $I = A \cdot e^{-W/kT}$ (k = Boltzmannsche Konstante, A = Konstante) ergibt sich, daß eine — nicht beobachtete — vier- bis fünffache Übersättigung zur Tropfenbildung aus einer homogenen Phase notwendig wäre. Bei Vorhandensein von Kondensationskernen erniedrigt sich die Keimbildungsarbeit W , es sinkt daher bei gleichbleibender Keimbildungsgeschwindigkeit der zur Tröpfchenbildung notwendige Grad der Übersättigung. Verf. leitet die darauf bezüglichen Formeln ab und untersucht mit ihrer Hilfe den Kondensationsprozeß für eine isotherm und eine adiabatisch geschichtete Atmosphäre. Es zeigt sich an Zahlenbeispielen, daß eine Kondensation bei fehlenden Kondensationskernen ausgeschlossen ist. Darüber hinaus läßt sich für verschiedene Annahmen über die Größe der Kondensationskerne die Bildung der Wolkenelemente verfolgen und aus gegebenen Anfangsbedingungen zahlenmäßig berechnen. Insbesondere kann man die Höhe, in welcher die Keimbildungsarbeit W verschwindet, d. h. die Höhe eintretender Kondensation leicht angeben.

H. Philipps (Frankfurt a. M.).

Arakawa, Hedetosi, and Motozi Yositate: On the elevation of the surface of the sea under the influence of a travelling low pressure. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. 18, 51—59 (1936).

Es wird angenommen, daß das Tiefdruckgebiet sich mit gleichförmiger geradliniger Geschwindigkeit bewegt. Erdrotation und Reibung bleiben unberücksichtigt. Nachdem die Formeln für beliebige Druckverteilung aufgestellt sind, wird der Effekt eines kreisförmigen Tiefdruckgebietes (Radius a) mit konstantem Druck P diskutiert. Die Erhebung der Seeoberfläche wächst in dem Maße, wie sich die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Druckverteilung v der Geschwindigkeit langer Wellen $\sqrt{g \cdot h}$ nähert und wird theoretisch unendlich bei Übereinstimmung beider Größen. Für den Mittelpunkt ergibt sich

$$\zeta_0 = - \frac{P}{\varrho g \sqrt{1 - \frac{v}{gh}}}.$$

Depression der Meeresoberfläche findet vor und hinter dem Zentrum statt, Erhebung rechts und links. Wenn $v \propto \sqrt{g \cdot h}$, verliert die Formel freilich ihre Gültigkeit, einmal weil sie wegen Vernachlässigung der quadratischen Glieder nur für kleine Geschwindigkeiten gilt, dann weil sich die Reibung geltend macht. Haurwitz.

Schive, J.: Die Mitnahme der Laplace-Gleichung in der Netzausgleichung. Astron. Nachr. 259, 81—84 (1936).

Es wird eine einfache Darstellung der Verwendung von Laplaceschen Gleichungen in Verbindung mit geodätischen Messungen gegeben. Bei fehlerfreien geodätischen und astronomischen Messungen gilt die Laplacesche Gleichung auch dann, wenn Lotabweichungen vorliegen. Ein Widerspruch in der Laplaceschen Gleichung wird durch die Erfüllung einer verhältnismäßig einfachen Bedingungsgleichung zum Verschwinden gebracht, indem an Breite, Länge und Azimut des Ausgangs- und des Endpunktes und an die Richtungen des geodätischen Netzes nach der Methode der kleinsten Quadrate Verbesserungen angebracht werden. Jede Laplacesche Gleichung liefert eine neue Bedingungsgleichung. Die nach der Gesamtausgleichung noch verbleibenden Unterschiede zwischen den astronomischen und geodätischen Werten sind Lotabweichungen.

Schmehl (Potsdam).